

# **Deterministische Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen**

- Theorie und Anwendung -

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

im Fach Physik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I

Humboldt-Universität zu Berlin

von

**Dipl.-Ing.(FH) Johannes Frank, M.Eng.**

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:

Prof. Dr. Jan-Hendrik Olbertz

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I:

Prof. Dr. Andreas Herrmann

Gutachter:

1. PD Dr. Günther Wernicke

2. Prof. Dr. Carsten Fallnich

3. PD Dr. Alejandro Saenz

**eingereicht am:** 31.01.2012

**Tag der mündlichen Prüfung:** 17.09.2012



## **Zusammenfassung**

Zur vollständigen Beschreibung eines monochromatischen Wellenfeldes ist die Kenntnis über die Amplituden- und Phasenverteilung unabdingbar. Während sich die messtechnische Erfassung der Amplitudenverteilung durch lichtempfindliche Sensoren recht einfach realisieren lässt, gestaltet sich die Bestimmung der Phasenverteilung weitaus schwieriger. Die Phasenverteilung eines optischen Wellenfeldes kann nur über indirekte Verfahren gewonnen werden. Es ergibt sich ein sogenanntes phase retrieval Problem. Zur Lösung dieses Problems bieten sich verschiedene Verfahren aus dem Bereich der berührungslosen und zerstörungsfreien optische Messtechnik an. In dieser Arbeit wird ein deterministisches Verfahren zur Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen vorgestellt. Die erste Greensche Identität dient als Grundlage zur Entwicklung einer Gleichung, welche in der Lage ist, bei der Rekonstruktion einer Phasenverteilung spezifische Randbedingungen zu berücksichtigen. Dies ermöglicht unter anderem eine genaue Charakterisierung von Phasenobjekten bzw. ihren optischen Eigenschaften, wie beispielsweise der Brechzahlverteilung. Das vorgestellte Verfahren zur Phasenrekonstruktion basiert einerseits auf schnellen Algorithmen, welche die Leistung von parallelen Prozessoren ausnutzen und andererseits auf geschickten experimentellen Aufbauten, mit welchen die notwendigen Eingangsdaten zur Lösung der Gleichung simultan gewonnen werden können. Es ergibt sich damit die Möglichkeit, die Amplituden- und Phasenverteilung eines Wellenfeldes in Echtzeit zu bestimmen und daraus folgend ein Mittel zur quantitativen Bewertungen und Analyse von dynamischen Prozessen sowohl in der Industrie als auch im Bereich der Life Sciences.

## **Abstract**

In order to describe a monochromatic wave field entirely, knowledge about the amplitude and phase distribution is elementary. While it is easy to measure the amplitude distribution of an optical wave field by the use of photosensitive detectors, the determination of the phase distribution is by far more difficult. Due to the fact, that the phase distribution can not be measured directly, a problem of phase retrieval is presented. This problem may be solved by applying a non-contacting and non-destructive optical metrology technique. In this thesis a deterministic method for phase retrieval based on Green's functions will be introduced. Green's first identity serves as a starting point to derive an equation for phase retrieval considering different boundary conditions. Among others, this allows an exact characterization of phase objects, or their optical properties, as for example the refractive index distribution. On the one hand, the presented phase retrieval technique is based on fast algorithms which take advantage of the performance of parallel processors. On the other hand, skilful experimental setups allow the simultaneous acquisition of the input data, which are necessary to solve the phase retrieval equation. It follows that the presented technique is able to determine the amplitude and phase distribution of a wave field in real-time. Hence this technique enables the quantitative evaluation and analysis of dynamic processes in industry as well as in the area of life sciences.



# Danksagung

Während des Abfassens dieser Arbeit war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Optik und Elektronik der Fachhochschule Köln (AOE) beschäftigt. Ich bin deshalb besonders der Humboldt-Universität zu Berlin dankbar, diese Arbeit am Institut für Physik einreichen zu dürfen. Dank gilt dabei vor allem meinen beiden Betreuern PD Dr.-Ing. habil. Günther Wernicke (Berlin) und Prof. Dr.-Ing. Stefan Altmeyer (Köln), die es mir ermöglichten, diese Arbeit umzusetzen. Des Weiteren möchte ich mich bei meinen Kollegen am AOE bedanken. Ihre unermüdliche Unterstützung, der gemeinsame Spaß an und auf der Arbeit und die besondere Atmosphäre im AOE haben mich durch meine Forschungsarbeiten getragen. Nicht zu vergessen sind die Diplom-, Bachelor- und Master-StudentInnen, die mich im Rahmen ihrer Abschlussarbeiten tatkräftig in meiner Forschung unterstützten. Ganz besonderer Dank geht an meine Familie und meine Freundin. Ohne ihren bedingungslosen Rückhalt, besonders in schwierigen Zeiten, wäre ich manchmal verloren gewesen.

Köln, im Januar 2012

Johannes Frank



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen und theoretische Vorbetrachtungen</b>	<b>5</b>
2.1	Parabolische Wellengleichung . . . . .	5
2.2	Fresnel-Näherung und Ausbreitung von monochromatischem Licht . . . . .	6
2.3	Deterministische Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen . . . . .	8
2.3.1	Gleichung zur Phasenrekonstruktion und Lösungsprobleme . . . . .	8
2.3.2	Richtungsaufspaltung der Rekonstruktionsgleichung . . . . .	11
2.3.3	Vergleich zu einem bekannten Lösungsverfahren der TIE . . . . .	12
2.4	Experimentelle Einschränkungen des Rekonstruktionsverfahren . . . . .	13
2.4.1	Räumliche und zeitliche Kohärenz der Lichtquelle . . . . .	14
2.4.2	Beleuchtung und Intensitätsverteilung . . . . .	14
2.4.3	Näherung der Ableitung und Defokusdistanz . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Numerische Implementierungen zur Phasenrekonstruktion und Simulationen</b>	<b>19</b>
3.1	Numerische Implementierungen . . . . .	19
3.1.1	Fresnel-Faltungsmethode . . . . .	19
3.1.2	Deterministische Phasenrekonstruktion . . . . .	20
3.2	Simulationen . . . . .	28
3.2.1	Sphärische Phasenstörung . . . . .	29
3.2.2	Glasfaser . . . . .	32
3.2.3	Absorbierendes Objekt . . . . .	41
3.2.4	Beurteilung der Ergebnisse und Fehlerabschätzung . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Experimentelle Realisierung</b>	<b>51</b>
4.1	Komponenten . . . . .	51
4.1.1	Mikroskop . . . . .	51
4.1.2	Lichtquellen . . . . .	54
4.1.3	Kamera . . . . .	54
4.2	Aufbauten . . . . .	55
4.2.1	Sequentielles System . . . . .	55
4.2.2	Echtzeit-System . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse, Auswertung und Anwendung</b>	<b>61</b>
5.1	Experimentelle Ergebnisse und Auswertung . . . . .	61
5.1.1	Technische Proben . . . . .	61

5.1.2	Biologische Proben . . . . .	70
5.2	Komplexe Wellenfeldmanipulation . . . . .	74
5.2.1	Nachstellen mikroskopischer Kontrastierungsverfahren . . . . .	74
5.2.2	Propagation eines Wellenfeldes . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Greensche Funktionen und Herleitungen zur Phasenrekonstruktion</b>	<b>87</b>
A.1	Greensche Identität und Greensche Funktion . . . . .	87
A.1.1	Herleitung der ersten Greenschen Identität . . . . .	87
A.1.2	Grundlagen zur Greenschen Funktion . . . . .	88
A.2	Herleitungen zur Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen . . . . .	90
A.2.1	Phasenrekonstruktion und die erste Greensche Identität . . . . .	90
A.2.2	Eigenfunktionen der Helmholtz-Gleichung . . . . .	91
A.2.3	Greensche Funktion und Eigenfunktionen der Helmholtz-Gleichung . . . . .	92
A.2.4	Richtungsableitungen der Greenschen Funktion . . . . .	97
A.2.5	Phasenrekonstruktion mit Neumann-Randbedingungen . . . . .	99
A.2.6	Phasenrekonstruktion mit Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	104
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>123</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>125</b>

# 1 Einführung

Menschen besitzen die Fähigkeit, Objekte und Gegenstände funktional zu bewerten, indem sie zum Beispiel die Form oder Kontur visuell erfassen und die Materialzusammensetzung und -beschaffenheit durch Tasten wahrnehmen. Dies ermöglicht ihnen, anhand verschiedener Kriterien zu entscheiden, ob ein Objekt beispielsweise ihren Ansprüchen genügt oder ob es seine vorgesehene Aufgabe erfüllen kann. Für Menschen gestaltet sich diese Auswahl intuitiv, wohingegen dies für Maschinen und Geräte eine komplexe Aufgabe darstellt. Es sind aber gerade Letztere, welche in industriellen Abläufen für solche Zwecke eingesetzt werden. Als Beispiele können hier die Entwicklung und Überwachung von Fertigungsprozessen oder die Qualitätssicherung in der Produktion angeführt werden, die garantieren soll, dass die hergestellten Gegenstände den an sie gestellten Anforderungen gerecht werden. Einige Gründe für die Verwendung von Maschinen in diesen Bereichen sind, dass die extrem hohe Anforderung an die Geschwindigkeit von Menschen kaum zu erfüllen ist, dass Menschen die sehr monotone Beschäftigung kaum zuzumuten ist und dass Menschen zu kleine Objekte schlicht nicht erkennen können. Auch in anderen Bereichen, wie beispielsweise den Life Sciences, ist der Einsatz von maschinellen Messgeräten aufgrund der besonderen Größe und Art der Objekte mittlerweile unabdingbar. In der Zell- und Molekularbiologie geben quantitative Auswertungen der Form und Zusammensetzung einer Probe Aufschluss über ihre Funktionsweise. Zur Identifizierung und Charakterisierung von Zellen und Mikroorganismen werden im Bereich der medizinischen Diagnostik Informationen über Gestalt und Struktur herangezogen, und mit Hilfe hochtechnisierter Systeme können Vorgänge und Zustände in biologischen Proben beschrieben werden. Die Kenntnis über objektspezifische Größen wie zum Beispiel Form, Materialzusammensetzung oder deren zeitliche Änderung, ist demnach in verschiedensten Bereichen von großem Belang. Gleichzeitig stellt sich aber immer wieder die Frage, wie unter den gegebenen Bedingungen diese Kenngrößen maschinell und quantitativ erfasst werden können. Eine Möglichkeit eröffnet dabei die berührungslose und zerstörungsfreie optische Messtechnik.

Wird ein Objekt mit Licht beleuchtet, so sind Informationen über dessen Form und Materialbeschaffenheit in der Amplituden- und Phasenverteilung des vom Objekt beeinflussten Wellenfeldes enthalten. Während die Amplitudenverteilung eines Wellenfeldes durch Einsatz lichtempfindlichen Sensoren relativ einfach bestimmt werden kann, gestaltet sich die Ermittlung der Phasenverteilung hingegen schwierig. Zur vollständigen Beschreibung eines Wellenfeldes ist aber die Kenntnis der Amplituden- und Phasenverteilung unabdingbar. Da die Phasenverteilung aber aufgrund der hohen Frequenzen des sichtbaren Spektralbereiches nicht direkt zugänglich ist, muss sie über indirekte Verfahren ermittelt werden. Es ergibt sich ein sogenanntes *phase retrieval* Problem.

### Stand der Technik

Die am weitesten verbreitete Lösung des *phase retrieval* Problems ist die Interferometrie. Hierbei wird das Wellenfeld, dessen Phasenverteilung bestimmt werden soll, kohärent mit einer Referenzwelle bekannter Phasenverteilung überlagert [1]. Mit Hilfe geeigneter Methoden kann anschließend aus dem resultierenden Interferogramm die Phasenverteilung des Objektes extrahiert werden [2, 3]. Die Schwierigkeiten der interferometrischen Verfahren liegen vor allem in den extrem hohen Anforderungen an den optischen Aufbau und die benötigten Lichtquellen [4]. Einsatzfelder dieser Verfahren liegen unter anderem im Bereich der Fertigung optischer Komponenten, um einen Produktionsprozess mit dauerhaft hoher Qualität zu gewährleisten.

Andere Methoden zur Ermittlung der Phasenverteilung eines Wellenfeldes gehören zu der Klasse der sogenannten *inversen Probleme*. Hierbei wird die Phasenverteilung nicht auf Basis interferometrischer Messungen bestimmt, sondern mit Hilfe einfacher Intensitätsaufnahmen, die durch Propagation oder Abbildung gewonnen wurden. Gerade diese Verfahren haben in den letzten Jahren immer mehr Einzug in die optische Messtechnik gehalten, da sie die Nachteile der Interferometrie umgehen. Die häufigsten Ansätze zur Lösung dieses Problems stellen dabei die iterativen Methoden dar, da eine geschlossene Lösung meist nur schwierig zu formulieren ist [5, 6]. Leider zeigen diese Algorithmen oft Probleme mangelnder Eindeutigkeit und Konvergenz, wobei gleichzeitig der iterative Charakter zu langen Rechenzeiten führt [7–9]. Durch eine deutlich höhere Anzahl von Eingangsdaten konnten diese Verfahren vor allem in Bezug auf die oben angeführten Probleme verbessert werden [10–15]. Der Einsatz phasenschiebender räumlicher Lichtmodulatoren [16] ermöglicht dabei den Aufbau kompakter Messsysteme, weshalb unter den iterativen *phase retrieval* Techniken diese Ansätze als besonders erfolgversprechend gelten [17–23]. Der große Nachteil langer Rechenzeiten aufgrund ihres iterativen Charakters bleibt dabei allerdings erhalten.

Bei den wenigen aus der Literatur bekannten deterministischen Verfahren müssen bestimmte Annahmen über die Eigenschaften des zu untersuchenden Wellenfeldes gemacht werden, um eine geschlossene Gleichung zu formulieren. Beispiele sind unter anderem die Arbeiten von Martin et al. und Nakajima [24–30], welche aber wegen des enormen numerischen Aufwandes und der notwendigen Vorkenntnisse über das Objekt nur bedingt einsetzbar sind. Die von Kou und Sheppard und Paganin et al. publizierten Ansätze zeigen, wie die Aufnahmen eines differentiellen Interferenzkontrast (DIK)-Mikroskopes [31] herangezogen werden können, um auf deterministischem Wege die Phasenverteilung eines zu untersuchenden Objektes zu gewinnen [32–34]. Die Qualität der rekonstruierten Phasenverteilung ist dabei aber sehr stark von der Qualität des experimentellen Aufbaus und dem Geschick des Experimentators abhängig.

Eines der bekanntesten Verfahren zur deterministischen Phasenrekonstruktion ist die sogenannte *transport-of-intensity equation* (TIE), die erstmals 1983 von Teague vorgestellt wurde [35]. Die TIE beschreibt den Zusammenhang zwischen der Phasenverteilung eines Wellenfeldes und der Änderung der Intensitätsverteilung in Ausbreitungsrichtung. Zur Rekonstruktion der Phasenverteilung eines zu untersuchenden komplexen Wellenfeldes benötigt dieses Verfahren als Eingangsdaten lediglich Intensitätsaufnahmen des Wellenfeldes aus unterschiedlichen Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, welche sich mit einfachen zweidimensionalen (CCD-)Sensoren detektieren lassen. Messverfahren, die auf Näherungen der TIE basieren, sind unter den Namen

---

*curvature sensing* und *phase diversity* vor allem im Bereich der adaptiven Optik (AO) bekannt, da sie die gesuchte Phasenverteilung relativ schnell rekonstruieren und somit AO-Regelkreise geschlossen angesteuert werden können [36–38]. Neueste Ansätze verknüpfen diese Näherungen gar mit iterativen Verfahren [39]. Vorteil dieser Kombination ist die sichere Konvergenz im Vergleich zu reinen iterativen Methoden. Nachteilig ist aber wiederum die lange Rechenzeit. Während sich die TIE einfach formulieren lässt, gestaltet sich ihre näherungsfreie Lösung als schwierig. Dies wurde auch schon von Beleggia et al. angemerkt: „*The main problem that raises a considerable amount of skepticism in the scientific community, is how to proceed further in extracting the phase information from the TIE*“ [40]. Die TIE hat die Form einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung und kann deshalb nur unter Berücksichtigung spezifischer Randbedingungen gelöst werden. Das von Teague vorgeschlagene Verfahren zur Lösung der TIE basierte auf der Verwendung der Greenschen Funktion des freien Raumes und macht damit, wie andere gängige Lösungsverfahren, explizite Annahmen über die Randbedingungen des Objektes [35]. Dies führt bei einer Vielzahl von Proben zu starken numerischen Artefakten in der berechneten Phasenverteilung [41, 42]. Zusätzlich wurde die von Teague beschriebene Lösung auf reine Phasenobjekte mit konstanter Intensität beschränkt [35]. Ein wesentlicher Fortschritt wurde in diesem Bereich von Paganin und Nugent erzielt. Sie stellten einen schnellen und robusten Algorithmus zur Lösung der TIE auf Basis von zweidimensionalen Fourier-Transformationen vor, welcher auch schwache Intensitätsmodulationen berücksichtigen kann [43–45]. Die Verwendung der Fourier-Transformationen setzt aber periodische Randbedingung für das zu untersuchende Objekt voraus [46, 47]. Dies wiederum entspricht der Annahmen des unbegrenzten freien Raumes, welche auch von Teague gemacht wurde [41]. Periodische Randbedingungen für das Objekt stehen aber meist im Widerspruch zu den experimentellen Gegebenheiten. Deshalb publizierten Gureyev et al. eine Lösung der TIE unter Berücksichtigung von Randbedingungen [48, 49], indem sie die TIE in eine Summe von orthogonalen Zernike-Polynomen [50] zerlegten. Nachteile dieser Technik sind, dass die meisten (CCD-)Detektoren rechteckig sind und eine Transformation der gemessenen Intensitätsverteilungen in Polarkoordinaten zu numerischen Fehlern führen kann. Sollte außerdem das Objekt keine radiale Symmetrie aufweisen, wäre eine Zerlegung des Signals in Fourier-Koeffizienten besser geeignet [49]. Gureyevs Ansatz der Zerlegung in Zernike-Polynome basiert darüber hinaus auf einer zeitintensiven Inversion einer Matrix, wobei die Größe der Matrix von der Anzahl der für die Zerlegung hinzugezogenen Polynome abhängig ist. Demzufolge würde die Verwendung der Fourier-Transformation die Berechnungszeit, im Vergleich zur Zerlegung in Zernike-Polynomen, deutlich reduzieren. Dies führt aber unweigerlich auf die bereits erwähnten Schwierigkeiten der periodischen Randbedingungen.

## **Ziele und Aufbau der Arbeit**

In Rahmen dieser Arbeit soll eine verallgemeinerte deterministische Methode zur Phasenrekonstruktion vorgestellt werden, welche die von Paganin und Nugent vorgeschlagene Lösung der TIE [43–45] als Spezialfall enthält. Dabei bilden die erste Greensche Identität und Greensche Funktionen die Grundlage dieses Rekonstruktionsverfahrens, welches in Kapitel 2 eingeführt wird. Aufgrund der Formulierung mit Hilfe Greenscher Funktionen kann die vorgestellte Methode sowohl Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen als auch die des unbegrenzten freien

Raumes bei der Rekonstruktion der Phasenverteilung berücksichtigen [41]. Die Art der Gleichung ermöglicht außerdem die Verwendung gemischter Randbedingungen und damit eine genaue Anpassung der Lösungsgleichung an objektspezifische Randbedingungen. Deshalb kann, im Vergleich zu anderen gängigen Verfahren, die gesuchte Phasenverteilung mit höherer Genauigkeit rekonstruiert werden [42]. Dies stellt ein entscheidendes Ziel der Arbeit dar und soll in Kapitel 3 anhand von Simulationen aufgezeigt werden. Als weiteres Ziel gilt es, den experimentellen Aufwand für das Rekonstruktionsverfahren möglichst gering zu halten, um die Technik mit Standardlaborausrüstung umsetzen zu können. Dabei soll die Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung in Echtzeit realisierbar sein. Dies eröffnet die Möglichkeit, sowohl die Amplituden- als auch die Phasenverteilung eines Objektes gleichzeitig zu beobachten und quantitativ zu erfassen. Produktionsprozesse oder auch dynamische Vorgänge in biologischen Proben können mit diesem deterministischen Verfahren mit hinreichend hoher zeitlicher Auflösung bewertet und ausgewertet werden. In Kapitel 4 werden die dafür notwendigen experimentellen Ansätze im Detail vorgestellt. Sie basieren einerseits auf schnellen Algorithmen, welche die Leistung von parallelen Prozessoren ausnutzen und andererseits auf geschickten optischen Aufbauten, welche die Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen gleichzeitig detektieren [51, 52]. Da die rekonstruierte Phasenverteilung der zu dem Objekt gehörigen optischen Weglänge entspricht, lässt sich darüber auf bestimmte optische Eigenschaften rückschließen [53]. Ist zum Beispiel die Geometrie eines Objektes bekannt, so kann anhand der optischen Weglänge dessen Brechzahl berechnet werden. Entsprechende Ergebnisse werden in Kapitel 5 gezeigt und diskutiert. Eine Zusammenfassung der Arbeit mit Ausblick erfolgt abschließend in Kapitel 6. Um vor allem die Kapitel 2 und 3 möglichst übersichtlich und klar strukturiert zu halten, wurde die Arbeit des Weiteren so aufgebaut, dass die genauen mathematischen Herleitungen zum deterministischen Phasenrekonstruktionsverfahren zusammen mit den notwendigen Grundlagen zu Greenschen Funktionen, im Anhang A zu finden sind.



## 2 Physikalische Grundlagen und theoretische Vorbetrachtungen

In diesem Kapitel sollen die für diese Arbeit relevanten physikalischen Grundlagen erläutert werden. Darunter fällt die Beschreibung der Ausbreitung von monochromatischem Licht im freien Raum und deren mathematische Näherungen. In einem weiteren Abschnitt wird das auf Greenschen Funktionen basierende deterministische Phasenrekonstruktionsverfahren hergeleitet und in Zusammenhang mit der am weitesten verbreiteten Technik, der *transport-of-intensity equation* (TIE) [35], gebracht.

### 2.1 Parabolische Wellengleichung

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist durch die Maxwell-Gleichungen und der daraus resultierenden Wellengleichung genau bestimmt [50]. Unter der Annahme von monochromatischen stationären Feldern kann die Wellengleichung weiter vereinfacht werden: Wird jede Vektorkomponente des magnetischen bzw. elektrischen Feldes einzeln betrachtet und diese mit  $U_z(\mathbf{r})$  bezeichnet, so ergibt sich die skalare Helmholtz-Gleichung als monochromatische Lösung der Wellengleichung im freien Raum [54]

$$\nabla^2 U_z(\mathbf{r}) + k^2 U_z(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.1)$$

wobei  $\nabla^2$  für den Laplace-Operator,  $k = 2\pi/\lambda$  für die Wellenzahl,  $\lambda$  für die Wellenlänge des Lichts und  $\mathbf{r} = (x, y)$  für den Ortsvektor in kartesischen Koordinaten in der  $(x, y)$ -Ebene steht. Der Index  $z$  bezeichnet die Entfernung vom Ursprung des Koordinatensystems entlang der optischen Achse. Das Feld  $U_z(\mathbf{r})$  wird dabei durch seine Phasen-  $\Phi_z(\mathbf{r})$  und Intensitätsverteilung  $I_z(\mathbf{r})$  definiert. Es wird dabei angenommen, dass die Intensitätsverteilung  $I_z(\mathbf{r})$  überall in einer Entfernung  $z$ , zum Beispiel mit einem zweidimensionalen Detektor, messbar ist. Die komplexe Funktion  $U_z(\mathbf{r})$  beschreibt somit eine skalare Welle in der  $(x, y)$ -Ebene im Abstand  $z$  vom Ursprung und wird folgendermaßen definiert:

$$U_z(\mathbf{r}) = \sqrt{I_z(\mathbf{r})} \exp[-i\Phi_z(\mathbf{r})] \quad (2.2)$$

Die Helmholtz-Gleichung, wie sie in Gleichung (2.1) dargestellt ist, beschreibt die Ausbreitung von monochromatischem Licht im freien Raum. Fundamentallösungen sind, wie auch für die Wellengleichung, neben der Kugelwelle auch die ebene Welle [1].

Im Rahmen dieser Arbeit sollen aber elektromagnetische Felder untersucht werden, deren Ausbreitung mit guter Genauigkeit dem paraxialen Bereich zugeordnet werden können. Die Wellen breiten sich demnach nur unter kleinem Winkel zur optischen Achse aus und ermöglichen somit

deren Beschreibung mit Hilfe der Fresnel-Näherung: Die Phasenfronten der Wellen werden durch Parabeln und nicht durch Kugeln dargestellt. Diese Vereinfachung führt auf eine Wellengleichung, die im Weiteren als parabolische Wellengleichung bezeichnet wird. Die Herleitung dieser Gleichung beruht auf der sogenannten *slowly varying envelope approximation*. Hierbei wird angenommen, dass die komplexe Wellenfunktion von einer sich nur leicht ändernden einhüllenden Funktion moduliert wird. Eine ausführliche Herleitung der parabolischen Wellengleichung ist unter anderem in [54] zu finden. Die komplexe Funktion  $U_z(\mathbf{r})$  erfüllt in der parabolischen Näherung die Gleichung [35]

$$\left( i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\nabla_{\text{T}}^2}{2k} + k \right) U_z(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.3)$$

Der neu eingeführte Operator  $\nabla_{\text{T}}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  bezeichnet den transversalen Laplace-Operator, welcher nur in der  $(x, y)$ -Ebene wirkt. Fundamentallösungen der parabolischen Wellengleichung (2.3) sind, neben der Fresnel-Näherung der Kugelwelle, unter anderem der in der Laserphysik so wichtige Gaußsche-Strahl [54].

Die parabolische Wellengleichung (2.3) dient in dieser Arbeit als Grundlage zur Beschreibung der Wellenausbreitung, da alle Felder im Folgenden als paraxial angenommen werden.

## 2.2 Fresnel-Näherung und Ausbreitung von monochromatischem Licht

Fällt monochromatisches Licht auf ein Hindernis, so kann die Ausbreitung des Lichtes hinter der Störung durch die skalare Beugungstheorie beschrieben werden. Bedingt durch die experimentellen Gegebenheiten können die benötigten Beugungsintegrale verschieden ausgedrückt werden, wobei jede Art der Formulierung Vor- bzw. Nachteile besitzt [16, 55, 56]. Da die theoretischen Betrachtungen in dieser Arbeit auf der parabolischen Wellengleichung [siehe Gleichung (2.3)] und damit auf paraxialen Strahlen basiert, liegt es nahe, die Darstellung von Fresnel zu wählen. Hierbei wird von vornherein davon ausgegangen, dass nur Lichtwellen zur Beugungserscheinung beitragen, die unter kleinem Winkel zur optischen Achse verlaufen [16].

Die Grundlage des Fresnel-Beugungsintegrals bildet das Huygens-Fresnelsche Prinzip. Es besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Quellpunkt einer neuen Kugelwelle betrachtet werden kann [50]. Das optische Wellenfeld  $U_z(x, y)$  im Abstand  $z$  von einer beugenden Öffnung  $U_0(\xi, \eta)$  lässt sich nach Huygens und Fresnel wie folgt berechnen:

$$U_z(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\xi} \int_{\eta} U_0(\xi, \eta) \frac{\exp[ikr]}{r} \cos(\theta) \, d\xi d\eta \quad (2.4)$$

Die beugende Öffnung befindet sich hierbei in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene, während die parallel dazu liegende  $(x, y)$ -Ebene die Detektorebene darstellt. Die Größe  $\theta$  beschreibt den Winkel zwischen der Normalen der beugenden Öffnung und dem Vektor der von einem Quellpunkt innerhalb der beugenden Öffnung zu einem Beobachtungspunkt in der Detektorebene zeigt. Der Term  $\cos(\theta) = z/r$  wird auch als Neigungsfaktor bezeichnet und beinhaltet die Winkelabhängigkeit der Beugungsamplitude. Die Variable  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$  steht somit für die Distanz

jedes Punktes zwischen Beugungs- und Detektorebene. Das Integral ist derart formuliert, dass der Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der beugenden Öffnung fällt. Demnach steht die beugende Öffnung bei  $z = 0$  und die optischen Achse durchstößt die  $(x, y)$ -Ebene im Punkt  $x, y = 0$ .

Unter der Annahme, dass sich das Licht nur unter kleinem Winkel zur optischen Achse ausbreitet, können in Gleichung (2.4) einige Näherungen eingebracht werden. Diese Näherungen werden als paraxiale bzw. Fresnel-Näherungen bezeichnet. Eine genaue Herleitung, zusammen mit einer Diskussion über die Gültigkeit der Näherungen, ist in [16] zu finden. Für das Fresnel-Beugungsintegral ergibt sich [2, 3]:

$$U_z(x, y) = \frac{\exp[ikz]}{iz\lambda} \int_{\xi} \int_{\eta} U_0(\xi, \eta) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z} \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)\right] d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Das Integral in Gleichung (2.5) kann als Faltung der Funktion  $U_0(\xi, \eta)$  mit der Impulsantwort  $h(x, y)$  des freien Raumes in Fresnel-Näherung interpretiert werden. Nach Anwendung des Faltungstheorems der Fourier-Transformation [16] lässt sich das Beugungsintegral in die Form

$$U_z(x, y) = \exp[ikz] \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{U_0(x, y)\} \exp \left[ -i\pi\lambda z \left( f_x^2 + f_y^2 \right) \right] \right\} \quad (2.6)$$

überführen. Die Impulsantwort in Fresnel-Näherung  $h(x, y)$  bzw. die entsprechende Übertragungsfunktion  $H(f_x, f_y) = \mathcal{F} \{h(x, y)\}$  sind dabei durch

$$h(x, y) = \frac{\exp[ikz]}{iz\lambda} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \quad (2.7a)$$

und

$$H(f_x, f_y) = \exp[ikz] \exp \left[ -i\pi\lambda z (f_x^2 + f_y^2) \right] \quad (2.7b)$$

gegeben [16].

Gleichung (2.6) wird wegen der Berechnung auf Basis des Faltungstheorems als Fresnel-Faltungsmethode oder kurz CVM (*convolution method*) bezeichnet.

## 2.3 Deterministische Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen

In diesem Abschnitt soll die Theorie für das im Rahmen der Arbeit entwickelte nicht-interferometrische, nicht-iterative Phasenrekonstruktionsverfahren vorgestellt werden. Die Methode stützt sich dabei auf die Verwendung von Greenschen Funktionen zur Lösung einer Differentialgleichung, welche als Ergebnis die Phasenverteilung eines zu untersuchenden Wellenfeldes liefert [41, 42, 51–53]. Als Eingangsdaten für das Verfahren dienen, wie auch bei der TIE, simple Intensitätsmessungen aus verschiedenen Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle [35]. Die folgenden Betrachtungen wurden im Zusammenhang mit Algorithmen zur Phasendemodulation, welche vor allem im Rahmen der Interferometrie von großer Bedeutung sind, erstmals vorgestellt [57–62]. Ziel der Phasendemodulation bzw. des *phase unwrapping* ist es, die Sprungstellen in einem gemessenen Phasenverlauf zu beseitigen und ihn dadurch zu verstetigen [63, 64]. Das kann zum Beispiel durch integrieren des Gradienten der Phasenverteilung erreicht werden [65]. Diese Gegebenheit wird auch im vorgestellten Phasenrekonstruktionsverfahren ausgenutzt, weshalb es, im Vergleich zu iterativen Techniken, eine bereits demodulierte Phasenverteilung als Ergebnis liefert.

### 2.3.1 Gleichung zur Phasenrekonstruktion und Lösungsprobleme

Ausgangspunkt der Überlegungen zur Rekonstruktion einer Phasenverteilung auf Basis reiner Intensitätsmessungen mit Hilfe Greenscher Funktionen ist eine Formulierung von Fornaro et al. [57]. Diese nutzten die erste Greensche Identität in zwei Dimensionen zur Lösung eines SAR (Synthetic Aperture Radar) *phase unwrapping* Problems. Um die nachfolgende Herleitung möglichst übersichtlich und ihren Verlauf transparent zu halten, ist ein Großteil der Rechnungen nicht in den folgenden Abschnitten, sondern im Anhang A explizit ausgeführt. Den Eigenschaften der Greenschen Funktionen und ihre Anwendung auf das Phasenrekonstruktionsverfahren kommt in dieser Arbeit eine Schlüsselrolle zu. Demnach stellen die Herleitungen im Anhang A einen wesentlichen Punkt dieser Arbeit dar.

Mit Hilfe der im Anhang A.2.1 gezeigten Herleitung lässt sich für die gesuchte zweidimensionale Phasenverteilung  $\Phi_z(\mathbf{r})$  folgende Gleichung aufstellen:

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = - \int_R \{ \nabla_{\mathbf{T}'} \Phi_z \cdot \nabla_{\mathbf{T}'} G \} \, d\mathbf{r}' + \oint_C \Phi_z \{ \nabla_{\mathbf{T}'} G \cdot \mathbf{n}_C \} \, d\mathbf{r}' \quad (2.8)$$

wobei die Funktion  $G$  eine Greensche Funktion mit den im Anhang A.1.2 angeführten Eigenschaften darstellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier auf die explizite Darstellung der  $\mathbf{r}$ -Abhängigkeit der Funktionen im Integral verzichtet.

Bei der Lösung von Gleichung (2.8) ergeben sich drei offensichtliche Probleme:

1. Zur Berechnung des Integrals über den Rand  $C$  wird wiederum die gesuchte Phasenverteilung  $\Phi_z$  benötigt.
2. Es muss eine Greensche Funktion gefunden werden, welche unter den gegebenen Randbedingungen  $\nabla_{\mathbf{T}'}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  erfüllt.

3. Zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_z$  wird der Gradient der gesuchten Phasenverteilung  $\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi_z$  benötigt.

Im Folgenden sollen die drei Probleme diskutiert und Lösungen erarbeitet werden.

### Problem 1: Integral über den Rand $C$

Das Integral über den Rand  $C$  der Fläche  $R$  in Gleichung (2.8) kann vernachlässigt werden, wenn die Greensche Funktion  $G$  bestimmte Randbedingungen erfüllt. Hierfür eignen sich Neumann- oder Dirichlet-Randbedingungen. Diese sind definiert als:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in C \quad \text{für Dirichlet} \quad (2.9a)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_C = 0, \quad \mathbf{r}' \in C \quad \text{für Neumann} \quad (2.9b)$$

Eine weitere triviale Lösung des Randproblems ergibt sich, wenn die Fläche  $R$  als unendlich ausgedehnt angenommen wird und somit keinen Rand besitzt:

$$\text{unbegrenzter freier Raum} \quad (2.9c)$$

Im Weiteren soll davon ausgegangen werden, dass eine der drei oben erwähnten Bedingungen erfüllt ist (Dirichlet, Neumann, unbegrenzter freier Raum). Damit kann das Integral aus Gleichung (2.8) zu

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = - \int_R \{ \nabla_{\mathbf{r}'}\Phi_z(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} \, d\mathbf{r}' \quad (2.10)$$

vereinfacht werden. Die Lösung zur Rekonstruktion der Phasenverteilung reduziert sich somit erst einmal auf die Suche nach der geeigneten Greenschen Funktion  $G$ .

### Problem 2: Greensche Funktion

Aufgrund der Art von Gleichung (2.10) ist die gesuchte Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  nicht aus der Standardliteratur zu Differentialgleichungen wie zum Beispiel [66] zu entnehmen. Bekannt ist jedoch aus dem Anhang A.1.2 unter Gleichung (A.7), dass die zur Lösung benötigte Greensche Funktion der Greenschen Funktion des transversalen Nabla-Operators mit entsprechenden Randbedingungen genügen muss. Für die Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  bzw. deren Gradient  $\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ergeben sich, wie im Anhang A.2.4 gezeigt, entsprechend den Randbedingungen, die Funktionen  $\nabla_{\mathbf{r}'}G_D = (G_D^{x'}, G_D^{y'})$  und  $\nabla_{\mathbf{r}'}G_N = (G_N^{x'}, G_N^{y'})$ . Der Index  $D$  steht dabei für Dirichlet-,  $N$  für Neumann-Randbedingungen und die hochgestellten Indizes  $x'$  und  $y'$  für die Ableitung in die entsprechende Raumrichtung. Im Anhang A.2.4 ist ausführlich gezeigt, dass im Fall von

Dirichlet-Randbedingungen die Funktionen durch

$$G_D^{x'}(x, y, x', y') = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \times \begin{cases} \frac{\sinh\left(\frac{\pi m}{a}[b-y]\right) \sinh\left(\frac{\pi m}{a}y'\right)}{\sinh\left(\pi \frac{b}{a}m\right)}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\sinh\left(\frac{\pi m}{a}[b-y']\right) \sinh\left(\frac{\pi m}{a}y\right)}{\sinh\left(\pi \frac{b}{a}m\right)}, & \text{für } y < y' \end{cases} \quad (2.11)$$

und

$$G_D^{y'}(x, y, x', y') = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \times \begin{cases} \frac{\sinh\left(\frac{\pi n}{b}[a-x]\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{b}x'\right)}{\sinh\left(\pi \frac{a}{b}n\right)}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\sinh\left(\frac{\pi n}{b}[a-x']\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{b}x\right)}{\sinh\left(\pi \frac{a}{b}n\right)}, & \text{für } x < x' \end{cases} \quad (2.12)$$

gegeben sind. Werden bei der Konstruktion der Greenschen Funktion Neumann-Randbedingungen angesetzt, so sind die Ableitungen der Greenschen Funktion  $\nabla_{T'} G_N$  gleich

$$G_N^{x'}(x, y, x', y') = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \times \begin{cases} \frac{\cosh\left(\frac{\pi m}{a}[b-y]\right) \cosh\left(\frac{\pi m}{a}y'\right)}{\sinh\left(\pi \frac{b}{a}m\right)}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\cosh\left(\frac{\pi m}{a}[b-y']\right) \cosh\left(\frac{\pi m}{a}y\right)}{\sinh\left(\pi \frac{b}{a}m\right)}, & \text{für } y < y' \end{cases} \quad (2.13)$$

und

$$G_N^{y'}(x, y, x', y') = -\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \times \begin{cases} \frac{\cosh\left(\frac{\pi n}{b}[a-x]\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{b}x'\right)}{\sinh\left(\pi \frac{a}{b}n\right)}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\cosh\left(\frac{\pi n}{b}[a-x']\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{b}x\right)}{\sinh\left(\pi \frac{a}{b}n\right)}, & \text{für } x < x' \end{cases} \quad (2.14)$$

Die Variablen  $a$  und  $b$  in den vier Gleichungen stehen dabei für die Ausdehnung der Fläche  $R$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung.

Unter der Annahme, dass eine geeignete Greensche Funktion bzw. deren Gradient durch die obigen Gleichungen gefunden ist, stellt der Gradient der Phasenverteilung  $\nabla_{T'} \Phi_z(\mathbf{r}')$  die letzte Unbekannte in Gleichung (2.10) dar. Entsprechend spielt  $\nabla_{T'} \Phi_z(\mathbf{r}')$  eine entscheidende Rolle bei der Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_z(\mathbf{r})$ .

### Problem 3: Gradient der gesuchten Phasenverteilung

Im Jahre 1989 publizierten Abramochkin et al. [67] eine Gleichung, welche es ermöglicht, den Gradienten einer Phasenverteilung mit Hilfe einer Greenschen Funktion zu berechnen. Eingangsgröße dieser Gleichung ist, neben der notwendigen Greenschen Funktion, die Änderung der Intensitätsverteilung in Ausbreitungsrichtung  $z$ . Das Wellenfeld muss dabei die parabolische Wellengleichung (2.3) erfüllen. Unter der Annahme, die unter anderem von Teague [35] und Paganin [43] gemacht wurde, nämlich dass das Vektorfeld  $I_z(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{T}'}\Phi_z(\mathbf{r}')$  ein Gradientenfeld ist (siehe Abschnitt 2.4.2), stellten Abramochkin et al. [67] den Zusammenhang folgendermaßen dar

$$\nabla_{\mathbf{T}'}\Phi_z(\mathbf{r}') = \frac{k}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} \nabla_{\mathbf{T}''} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \quad (2.15)$$

Der Gradient der Phasenverteilung  $\Phi_z(\mathbf{r}')$  ergibt sich durch Faltung der Ableitung von  $I_z(\mathbf{r}'')$  in  $z$ -Richtung mit dem Gradienten der Greenschen Funktion  $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  und anschließender Skalierung.

### 2.3.2 Richtungsaufspaltung der Rekonstruktionsgleichung

Im vorherigen Abschnitt 2.3.1 konnten die notwendigen Ansätze erarbeitet werden, welche es ermöglichen, Gleichung (2.8) zu lösen. Wird Gleichung (2.15) in (2.10) eingesetzt, so ergibt sich die vollständige Rechenvorschrift zur Bestimmung der gesuchten Phasenverteilung

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = -k \int_R \left\{ \left[ \frac{1}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} \nabla_{\mathbf{T}''} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \right] \cdot \nabla_{\mathbf{T}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \quad (2.16)$$

Wie aus der Gleichung ersichtlich, wurde an dieser Stelle keine explizite Annahme bezüglich der Randbedingungen aus Gleichung (2.9) getroffen. Gleichung (2.16) ist in dieser Form allgemein gültig und je nach erforderlichen Randbedingungen variierbar. Eine weitere Vereinfachung der Gleichung lässt sich erzielen, wenn von den Eigenschaften des Vektorproduktes zwischen Gradient der Phasenverteilung und Gradient der Greenschen Funktion Gebrauch gemacht wird: Die Gleichung kann in zwei voneinander unabhängige Teilgleichungen  $\Phi_z^x$  und  $\Phi_z^y$  zerlegt werden.

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = \Phi_z^x(\mathbf{r}) + \Phi_z^y(\mathbf{r}) \quad (2.17a)$$

$$\Phi_z^x(\mathbf{r}) = -k \int_R \left\{ \left[ \frac{1}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} G^{x''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \right] G^{x'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \quad (2.17b)$$

$$\Phi_z^y(\mathbf{r}) = -k \int_R \left\{ \left[ \frac{1}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} G^{y''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \right] G^{y'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \quad (2.17c)$$

Abhängig vom Gradienten der Greenschen Funktion  $\nabla_{\mathbf{T}} G$  kann dieses Verfahren zur Phasenrekonstruktion auf Basis Greenscher Funktionen den unbegrenzten freien Raum, Dirichlet- und/oder Neumann-Randbedingungen für die zu rekonstruierende Phasenverteilung berücksichtigen. Dies ermöglicht eine sehr hohe Flexibilität der Berechnungsvorschrift und damit eine höhere Genauigkeit bei der Rekonstruktion verschiedensten Phasenverteilungen im Vergleich zu herkömmlichen Methoden, wie es bereits in [42] gezeigt wurde.

Die gesuchte Phasenverteilung  $\Phi_z(\mathbf{r})$  lässt sich somit unter Kenntnis der geeigneten Greenschen

Funktion bzw. deren Gradienten bestimmen. Die Greensche Funktion kann dabei an die jeweiligen objektspezifischen Randbedingungen angepasst werden. Als einzige Messgröße geht die Ableitung der Intensitätsverteilung in  $z$ -Richtung in die Berechnungsvorschrift ein.

### 2.3.3 Vergleich zu einem bekannten Lösungsverfahren der TIE

Wie bereits am Anfang dieses Kapitels angesprochen, stellt die *transport-of-intensity equation* (TIE) eine der bekanntesten deterministischen Methoden zu Phasenrekonstruktion im Fresnel-Bereich dar [35]:

$$\nabla_T \{I_z(\mathbf{r}) \nabla_T \Phi_z(\mathbf{r})\} = -k \frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial z} \quad (2.18)$$

Sie hat sich mittlerweile in den verschiedensten Bereichen der Optik etabliert, im sichtbaren Wellenlängenbereich [68–74], in der Elektronen- [40, 75–79] wie auch in der Röntgenoptik [34, 80–83]. Das von Teague entwickelte Verfahren [35, 84, 85] wurde in den letzten Jahren vor allem bezüglich intelligenter Lösungsansätze ständig weiterentwickelt [86–96]. Während der erste Lösungsansatz auf einer Poisson-Gleichung und der Greenschen Funktion des unbegrenzten freien Raumes basierte [35], stellte die Arbeitsgruppe um Nugent mehrere alternative Lösungsalgorithmen vor [48, 49, 97, 98]. Der wohl am weitesten verbreitete Lösungsansatz nutzt mehrere zweidimensionale Fourier-Transformationen, um die Gleichung (2.18) nach der Phasenverteilung zu lösen [43–45]. Hierbei ergibt sich die Schwierigkeit, dass diese schnelle Implementierung periodische Randbedingungen für das Objekt voraussetzt [46, 47]. Diese Bedingung ist im Allgemeinen natürlich nicht gegeben, weshalb die rekonstruierte Phasenverteilung oft von numerischen Artefakten überlagert wird [42, 47]. Es soll nun im weiteren Verlauf dieses Abschnittes gezeigt werden, dass der von Nugent et al. vorgeschlagene Lösungsansatz in der in dieser Arbeit entwickelten Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen als Spezialfall enthalten ist.

#### Phasenrekonstruktion im Fall des unbegrenzten freien Raumes

In Abschnitt 2.3.1 wurde gezeigt, dass je nach Wahl der Randbedingungen die Greensche Funktion bzw. ihr Gradient unterschiedlich darzustellen ist [siehe Gleichungen (2.11)–(2.14)]. Es wurden Lösungskonzepte sowohl für Dirichlet- als auch für Neumann-Randbedingungen vorgestellt. Jedoch wurde die in Gleichung (2.9c) erwähnte Randbedingung des *unbegrenzten freien Raumes* bis jetzt nicht behandelt. Diese soll im Folgenden betrachtet werden.

Wird in Gleichung (2.16) als Randbedingung für die Fläche  $R$  der unbegrenzte freie Raum angesetzt, können die Integrationsgrenzen auf  $[-\infty, \infty]$  erweitert werden. Gleichung (2.16) ergibt sich somit zu

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = -k \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{I_z(\mathbf{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} \nabla_{T''} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \right] \cdot \nabla_{T'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \quad (2.19)$$

Die Anwendung des Faltungstheorems der Fourier-Transformation [16] auf obige Formel führt zu einer Darstellung der Gleichung (2.19) im Frequenzbereich:

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = -k \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{ \nabla_T G(\mathbf{r}) \} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(\mathbf{r})} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{ \nabla_T G(\mathbf{r}) \} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (2.20)$$



Während  $I_z(\mathbf{r})$  und  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial z$  messbare Eingangsgrößen darstellen, ist die Funktion  $\mathcal{F}\{\nabla_{\mathbf{T}}G(\mathbf{r})\}$  bislang nicht bestimmt. In [41] wurde ausführlich gezeigt, dass

$$\mathcal{F}\{\nabla_{\mathbf{T}}G(\mathbf{r})\} = \frac{-if_x}{2\pi(f_x^2 + f_y^2)}\mathbf{e}_x + \frac{-if_y}{2\pi(f_x^2 + f_y^2)}\mathbf{e}_y \quad (2.21)$$

im Fall des unbegrenzten freien Raumes gilt. Die Vektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  stehen hierbei für die Einheitsvektoren in  $x$ - und  $y$ -Richtung und  $f_x$  und  $f_y$  sind die zu  $x$  und  $y$  konjugierten Frequenzvariablen. Werden in Gleichung (2.20) der Vektor  $\mathcal{F}\{\nabla_{\mathbf{T}}G(\mathbf{r})\}$  durch Gleichung (2.21) substituiert und wiederum die Eigenschaften des Vektorproduktes ausgenutzt, ergibt sich

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = \Phi_z^x(\mathbf{r}) + \Phi_z^y(\mathbf{r}) \quad (2.22a)$$

$$\Phi_z^x(\mathbf{r}) = \frac{k}{(2\pi)^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_x}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(\mathbf{r})} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_x}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (2.22b)$$

$$\Phi_z^y(\mathbf{r}) = \frac{k}{(2\pi)^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_y}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(\mathbf{r})} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_y}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (2.22c)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der von Nugent et al. vorgeschlagenen Lösung der TIE [43–46] und entspricht im Sinne der Greenschen Funktionen der Annahme des unbegrenzten freien Raumes. Es zeigt sich somit, dass, wie bereits am Anfang des Abschnitts erwähnt, die Lösung der TIE nach Nugent et al. als ein Spezialfall der in dieser Arbeit entwickelten Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen angesehen werden kann. Die hier entwickelte Methode stellt durch die Berücksichtigung spezifischer Randbedingungen demnach weitaus mehr Freiheitsgrade innerhalb der Berechnung der gesuchten Phasenverteilung zur Verfügung als andere bekannte Phasenrekonstruktionsverfahren.

## 2.4 Experimentelle Einschränkungen des Rekonstruktionsverfahren

Das in Abschnitt 2.3 entwickelte Verfahren zur deterministischen Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen unterliegt verschiedenen Näherungen und Bedingungen, welche bei einem Messaufbau bzw. bei der Untersuchung einer Probe zu beachten sind. Einen entscheidenden Punkt in der Herleitung des Verfahrens stellt der Gradient der gesuchten Phasenverteilung dar (siehe Abschnitt 2.3.1). Zur Berechnung des Gradienten muss das zu untersuchende Wellenfeld die parabolische Wellengleichung (2.3) erfüllen. Voraussetzung dafür ist ein zeitlich wie auch räumlich kohärentes Lichtfeld, dass sich paraxial ausbreitet. Die für den Gradienten notwendige Eingangsgröße, die Intensitätsverteilung  $I_z(\mathbf{r})$ , ist nach Definition des komplexen Wellenfeldes (siehe Abschnitt 2.1) überall messbar. Es wurde allerdings noch keinerlei Aussage darüber getroffen, wie die Ableitung der Intensität in Ausbreitungsrichtung  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial z$  zu bestimmen ist. Des Weiteren basiert die Herleitung auf einem idealen fehlerfreien abbildenden System, was in der Realität kaum gewährleistet werden kann. Im Folgenden sollen einige dieser Einschränkungen betrachtet und kurz erläutert werden. Die Argumentationen stützen sich dabei unter anderem auf Publikationen zur TIE, da sie aufgrund der gleichen Eingangsgrößen auch auf das Rekonstruktionsverfahren mit Hilfe Greenscher Funktionen übertragbar sind.

### 2.4.1 Räumliche und zeitliche Kohärenz der Lichtquelle

Die Herleitung des Rekonstruktionsverfahrens beruht auf der parabolischen Wellengleichung. Deshalb muss angenommen werden, dass das zu untersuchende Objekt von einer räumlich wie auch zeitlich kohärenten Lichtquelle beleuchtet wird [35, 41, 67, 99]. Von Interesse ist jedoch auch, wie sich der allgemeinere Fall der partiellen Kohärenz der Quelle auf die Gültigkeit der Gleichungen und somit auf das Messverfahren auswirkt [100, 101]. Nur wenige Monate nach der ersten Veröffentlichung der TIE [35] untersuchte und publizierte Streibl den Einsatz der TIE unter partiell kohärenten Bedingungen [102]. In seiner Arbeit analysierte Streibl unter anderem die Auswirkungen einer räumlich inkohärenten Lichtquelle auf die Gleichung. Er konnte dabei zeigen, dass die Gleichung bei Verwendung einer inkohärenten Quelle ihr Form beibehält, sofern die Lichtquelle symmetrisch um die optische Achse liegt. Die genaue Gestalt und Größe der Quelle spielt dabei keine Rolle. Die Intensitätsverteilung der inkohärenten Quelle muss somit nur  $I_Q(\mathbf{r}) = I_Q(-\mathbf{r})$  erfüllen. Dieses Ergebnis wurde sowohl theoretisch als auch experimentell unter anderem von Ade [103], Barty et al. [68] und anderen [104–107] bestätigt.

Neben der räumlichen Kohärenz spielt auch die zeitliche Kohärenz, also die spektrale Bandbreite der Quelle eine Rolle. Gerade der Einsatz von Lichtquellen mit geringer zeitlicher Kohärenz macht das Messprinzip attraktiv, da somit Kosten für aufwendige und teure kohärente Leuchtmittel eingespart werden können. Soll das Verfahren, wie es im Rahmen der Arbeit verwirklicht wurde, an einem Mikroskop umgesetzt werden, so ist die Gültigkeit der Gleichungen bei partiell kohärentem bzw. inkohärentem Licht eine Grundvoraussetzung. Die Fragestellung der zeitlicher Kohärenz wurde unter anderem ausführlich von Zysk et al. [108] und Gureyev [109] behandelt. In seiner Publikation formulierte Gureyev eine Transport-Gleichung auf Basis der spektralen Leistungsdichte. Das Ergebnis seiner Überlegungen führt auf eine Gleichung mit derselben Form wie die der herkömmlichen TIE, wobei er keinerlei Einschränkungen bezüglich des Kohärenzgrades des Lichtfeldes machte. Es zeigt sich außerdem, dass die resultierende Phasenverteilung eine Art mittlere Phase über die vorhandenen Frequenzen darstellt. Die Verwendung von polychromatischem Licht zur Bestimmung der Phasenverteilung in der Objektebene wurde auch in [68] untersucht. Unter Vernachlässigung von Dispersion und unter Annahme eines begrenzten Spektrums der Quelle, was meist der Realität entspricht, ergab sich eine gleichwertige Aussage zu Gureyevs Veröffentlichung. Messungen mit spektral breitbandiger Beleuchtung, zum Teil in Kombination mit Interferenzfiltern unterschiedlicher Halbwertsbreite, zeigen sehr gute Resultate und bestätigen somit diese theoretischen Überlegungen [68, 69, 102, 104, 105, 110].

### 2.4.2 Beleuchtung und Intensitätsverteilung

Die Intensitätsverteilung  $I_z(\mathbf{r})$  bzw. deren Ableitung in Ausbreitungsrichtung  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial z$  bilden die Grundlage für die Berechnung der gesuchten Phasenverteilung. Sie sind die einzigen zu messenden Eingangsgrößen, um die Phasenverteilung zu rekonstruieren. Die Intensitätsverteilung entsteht durch das Zusammenspiel zwischen der Beleuchtung und den Objekteigenschaften der zu untersuchenden Probe. Ist die Beleuchtung des Objektes homogen, wie es zum Beispiel durch Einstellen der Köhlerschen Beleuchtung [111] an einem Mikroskop gewährleistet sein sollte, so wird die Helligkeit in der Bildebene nur durch das Objekt moduliert. Ist das zu untersuchende Objekt ein reines Phasenobjekt, weist es also keinerlei Amplitudenmodulation bzw. Absorpti-

on auf, so erscheint das Objekt transparent. Das fokussierte Bild des Objektes  $I_z(\mathbf{r})$  entspricht somit der Lichtverteilung der Beleuchtung [112, 113]. Um die gesuchte Phasenverteilung zu rekonstruieren ist nach Gleichung (2.17) eine Division durch  $I_z(\mathbf{r})$  erforderlich. Dies setzt voraus, dass die Intensitätsverteilung an keiner Stelle innerhalb der Fläche  $R$  zu Null wird. Zum einen, weil Raumpunkte mit Null-Intensitäten zu Singularitäten innerhalb der Phasenverteilung führen [114], und zum anderen, weil eine Division durch Null physikalisch ohne Aussage ist. Der Verlauf der Intensitätsverteilung ist somit von sehr großer Bedeutung. Dies spiegelt sich auch in einem weiteren Aspekt wieder. Die Herleitung von Gleichung (2.17) wie auch die Lösung nach der Phasenverteilung auf Basis der TIE (2.18) beruht, wie in Abschnitt 2.3.1 gezeigt, auf der expliziten Setzung, dass das Vektorfeld  $\mathbf{F} = I_z(\mathbf{r})\nabla_T\Phi_z(\mathbf{r})$  als Gradientenfeld  $\mathbf{F} = \nabla_T\varphi(\mathbf{r})$  interpretiert werden kann [35, 41, 43, 67]. Im Allgemeinen kann aber über die Beschaffenheit des Feldes  $\mathbf{F}$  keine Aussage getroffen werden. Aus diesem Grund wird  $\mathbf{F}$  mit Hilfe des Helmholtz-Theorems bzw. der Helmholtz-Zerlegung [65, 115] in die Summe eines Gradienten- und eines Rotationsfeldes aufgeteilt:

$$\mathbf{F} = \nabla_T\varphi + [\nabla \times \mathbf{A}]_T, \quad \text{mit } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.23)$$

Teague ging bei der Suche nach einem geeigneten Lösungsweg für die TIE von vornherein davon aus, dass das Feld  $\mathbf{F}$  rotationsfrei sei und damit der Anteil  $[\nabla \times \mathbf{A}]_T$  nicht berücksichtigt werden muss [46]. Durch diese explizite Annahme konnte Teague die TIE in die Form einer einfach zu lösenden Poisson-Gleichung bringen [35]. Die Voraussetzung der Rotationsfreiheit wird auch bei der Herleitung von Gleichung (2.17) gemacht. Es soll nun an dieser Stelle untersucht werden, welche Bedingungen das allgemeine Feld  $\mathbf{F} = I_z(\mathbf{r})\nabla_T\Phi_z(\mathbf{r})$  erfüllen müsse, damit  $\mathbf{F} = \nabla_T\varphi(\mathbf{r})$  gilt. Dies ist offensichtlich nur dann erfüllt, wenn der rotierende Anteil von  $\mathbf{F}$  gleich Null ist. Unter Verwendung der Identität  $\text{rot grad } \varphi = 0$  muss für die Rotation auf Gleichung (2.23)

$$\begin{aligned} \nabla_T \times \mathbf{F} &= \nabla_T \times [\nabla \times \mathbf{A}]_T \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Einsetzen von  $\mathbf{F} = I_z(\mathbf{r})\nabla_T\Phi_z(\mathbf{r})$  liefert

$$\begin{aligned} \nabla_T \times \{I_z(\mathbf{r})\nabla_T\Phi_z(\mathbf{r})\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ I_z(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial y} \Phi_z(\mathbf{r}) \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ I_z(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x} \Phi_z(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial \Phi_z(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial y} \frac{\partial \Phi_z(\mathbf{r})}{\partial x} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Wie aus Gleichung (2.24) ersichtlich, ist die Bedingung  $\nabla_T \times \mathbf{F} = 0$  nur dann in Bezug auf die gemessene Intensitätsverteilung erfüllt, wenn  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial x = 0$  und  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial y = 0$ . Für den Gradient der Intensitätsverteilung muss somit  $\nabla_T I_z(\mathbf{r}) = 0$  gelten [43, 67, 99, 116]. Gleichzeitig muss aber, wie eingangs erwähnt, für jeden Raumpunkt  $I_z(\mathbf{r}) \neq 0$  sein. Diese beiden Bedingungen sind im Allgemeinen für reine Phasenobjekte ohne Einschränkungen realisierbar. Ist die Beleuchtung der transparenten Probe homogen, so ist  $\nabla_T I_z(\mathbf{r}) = 0$  und  $I_z(\mathbf{r}) \neq 0$ . Präparate,

welche aber die Amplitude des einfallenden Lichtes modulieren bzw. absorbierende Eigenschaften aufweisen, verletzen die Bedingung  $\nabla_{\mathbf{T}} I_z(\mathbf{r}) = 0$ . Folglich sind solche Objekte nur mit Einschränkungen quantitativ zu bewerten. Es hat sich allerdings sowohl in Simulationen als auch in verschiedenen experimentellen Untersuchungen gezeigt, dass eine Amplitudenmodulation von mehreren Prozent durchaus tolerabel ist, sofern sich die Modulation über den Ort nur leicht ändert [41, 42, 52, 53, 69, 104–107, 117–119].

### 2.4.3 Näherung der Ableitung und Defokusdistanz

Am Anfang des Abschnittes 2.4 wurde bereits angeführt, dass die Intensitätsverteilung  $I_z(\mathbf{r})$  eine überall im Raum messbare Größe darstellt. Sie kann durch einen geeigneten Photosensor, zum Beispiel eine CCD-Kamera, aufgezeichnet und anschließend digital weiterverarbeitet werden. Neben  $I_z(\mathbf{r})$  ist aber auch deren Ableitung  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial z$  für die Berechnung von Gleichung (2.17) notwendig. Da  $\partial I_z(\mathbf{r})/\partial z$  in der Praxis nicht direkt zugänglich ist, wird sich eines Verfahrens bedient, welches schon von Teague in [35] vorgeschlagen wurde. Die partielle Ableitung wird durch einen Differenzenquotienten genähert:

$$\frac{\partial I_z(\mathbf{r})}{\partial z} \approx \frac{I_+(\mathbf{r}) - I_-(\mathbf{r})}{\Delta z} \quad (2.25)$$

wobei  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  zwei leicht defokussierte Aufnahmen des Objektes darstellen. Die Defokussierung entspricht dabei  $\pm \Delta z/2$  in Bezug auf die fokussierte Intensitätsverteilung  $I_z(\mathbf{r})$  in der Ebene  $z = 0$  [40, 120]. Wird in Gleichung (2.17) die Näherung aus Gleichung (2.25) eingesetzt, so wird ersichtlich, dass zur Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_z(\mathbf{r})$  als Eingangsdaten lediglich Intensitätsverteilungen des Objektes aus leicht unterschiedlichen Ebenen entlang der  $z$ -Achse notwendig sind. Die Bestimmung von  $\Phi_z(\mathbf{r})$  reduziert sich somit auf die Aufnahme von drei Intensitätsverteilungen, genauer gesagt drei Photographien des zu untersuchenden Objektes. Es ist sofort verständlich, dass die Defokusdistanz  $\Delta z$  nicht zu groß werden darf, da sonst die Näherung der Ableitung in Gleichung (2.25) nicht mehr erfüllt ist. Andererseits muss  $\Delta z$  stets größer sein als die wellenoptische Schärfentiefe  $\delta z_R$  des abbildenden System, da sonst kein Änderung zwischen den beiden Aufnahmen  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  festzustellen wäre [102, 119]. Wird aber  $\Delta z$  sehr klein gewählt, zum Beispiel in der Nähe der wellenoptischen Schärfentiefe  $\delta z_R$ , um eine möglichst genaue Näherung der Ableitung zu erhalten, so wirkt sich Rauschen wesentlich stärker auf das Ergebnis aus, da die Unterschiede in den beiden Intensitätsaufnahmen nur minimal sind. Die Distanz  $\Delta z$  muss demnach so gewählt werden, dass die Amplitude des Rauschens auf den beiden Aufnahmen unterhalb der Änderung der Intensitäten liegt [35, 118]. Anders ausgedrückt: Um den Einfluss von Rauschen auf den Differenzenquotienten zu minimieren, muss die Defokussierung  $\Delta z$  einen gewissen Wert überschreiten. An diesem Punkt wird ersichtlich, dass die Wahl der richtigen Defokusdistanz  $\Delta z$  mit Schwierigkeiten verbunden sein kann. Es gilt einen Kompromiss zwischen optimalem Nachstellen der Näherung des Differentials (möglichst kleines  $\Delta z$ ) und den Auswirkungen des Rauschens (möglichst großes  $\Delta z$ ) zu finden [121, 122]. Es muss aber noch ein weiterer Aspekt berücksichtigt werden. Neben der Näherung der Ableitung und dem Einfluss des Rauschens ist die geeignete Defokusdistanz noch von einer anderen Größe abhängig: Es ist hinreichend bekannt, dass sich bei Defokussierung die optische Transferfunktion

(OTF) eines abbildenden Systems verändert. Die OTF fällt dabei zu hohen Frequenzen hin stark ab und eine korrekte Übertragung dieser Frequenzen ist somit bei einem defokussierten System nicht mehr gewährleistet [50, 69, 123]. Bei der Rekonstruktion einer Phasenverteilung kommt es aber oft gerade darauf an, feine Details innerhalb der Phasenstruktur sichtbar zu machen, um damit das Objekt genau charakterisieren zu können. Dies führt wiederum zur Überlegung, dass die Distanz  $\Delta z$  nicht zu groß gewählt werden darf, um die hochfrequenten Anteile in der Abbildung des Präparats zu erhalten. In der Literatur sind verschieden Ansätze zur Berechnung einer maximalen Defokusdistanz zu finden. Diese orientieren sich an der OTF des Systems und der in der zu untersuchenden Probe vorhandenen Ortsfrequenzen [40, 103, 120, 124]. Grundsätzlich lässt sich sagen, dass sich die maximale Defokusdistanz  $\Delta z$  umgekehrt proportional zur maximalen im Objekt vorkommenden Ortsfrequenz verhält. Für ein optimales Ergebnis sollte bei einem Präparat mit hochfrequenten Anteilen deshalb ein geringeres  $\Delta z$  eingestellt werden. Die OTF weist jedoch neben der Defokussierung noch eine weitere Abhängigkeit auf. Der Kohärenzgrad der Lichtquelle, zeitlich wie auch räumlich, hat entscheidenden Einfluss auf die Abbildungsleistung eines optischen Systems [123, 125–128]. Somit ist bei der Wahl der Distanz  $\Delta z$  auch die Abhängigkeit des Kohärenzgrades mit einzubeziehen [129]. Dazu zeigten Martin et al. in ihrer Publikation [120], dass die maximale Defokusdistanz umgekehrt proportional zur Ausdehnung der Lichtquelle verläuft. Bei einer räumlich kohärenten Quelle kann  $\Delta z$  größer als bei einer inkohärenten Quelle gewählt werden. Dies konnte auch in verschiedenen Simulationen und Versuchen verifiziert werden [105].



## 3 Numerische Implementierungen zur Phasenrekonstruktion und Simulationen

In diesem Kapitel gilt es die im vorherigen Kapitel 2 entwickelten Gleichungen auf Basis von Computerprogrammen zu beschreiben. Dafür ist es notwendig, die Gleichungen in eine numerisch berechenbare Darstellung zu überführen. Neben der numerischen Implementierung der Algorithmen werden in einem weiteren Abschnitt Simulationen anhand künstlicher Objekte dargestellt. Hiermit soll die Fähigkeit von Gleichung (2.17) zur Bestimmung der Phasenverteilung aus reinen Intensitätsmessungen unter verschiedenen Bedingungen aufgezeigt werden.

### 3.1 Numerische Implementierungen

Neben dem Verfahren zur Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen wird auch eine Technik zur Wellenfeldpropagation benötigt, um das Verfahren mit künstlichen Objekten zu testen. Zur Umsetzung der benötigten Gleichungen in Computeralgorithmen müssen diese in eine diskrete Form überführt werden. Daher werden im folgenden Abschnitt die in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen erläutert und gezeigt, wie die Diskretisierung für die einzelnen Methoden realisiert wurde.

#### 3.1.1 Fresnel-Faltungsmethode

Eine der gängigsten Techniken zur Propagation von Wellenfeldern ist die in Abschnitt 2.2 eingeführte Fresnel-Faltungsmethode (CVM). Hierbei wird das Fresnel-Beugungsintegral (2.5) als Faltung zwischen der Impulsantwort des freien Raumes in Fresnel-Näherung [siehe Gleichung (2.7a)] und dem Objekt bzw. der beugenden Öffnung interpretiert. Die CVM lässt sich numerisch relativ einfach im Frequenzbereich ausdrücken. Das Wellenfeld im Abstand  $z$  von der beugenden Öffnung ergibt sich, wie bereits eingeführt, durch

$$U_z(x, y) = \exp[ikz] \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{U_0(x, y)\} \exp \left[ -i\pi\lambda z \left( f_x^2 + f_y^2 \right) \right] \right\}$$

Da bei der numerischen Implementierung das kontinuierliche Signal auf einem rechteckigen Raster der Größe  $N_x \times N_y$  abgetastet wird, muss die Funktion dementsprechend diskretisiert werden. Es ist somit notwendig, die kontinuierlichen Koordinaten im Orts- und Frequenzbereich in diskrete Abtastintervalle zu überführen. Hierzu werden die Laufindizes  $j, l, m, n \in \mathbb{N}$  eingeführt. Diese entsprechen den einzelnen Stützstellen des rechteckigen Rasters im Orts- und Frequenzbereich. Um dem Abtastraster wiederum eine reelle Größe zuzuordnen, müssen die Laufindizes mit den Größen eines Abtastintervalls multipliziert werden. Im Fall der Ortskoordinaten entspricht dies zum Beispiel den Pixelgrößen des Detektors  $\Delta x$  in  $x$ - und  $\Delta y$  in  $y$ -Richtung. Bei

den Frequenzkoordinaten ergeben sich die Abtastintervalle  $\Delta f_x$  und  $\Delta f_y$  durch den Kehrwert aus Anzahl der Abtastpunkte multipliziert mit der Pixelgröße in der jeweiligen Raumrichtung.

$$x = j\Delta x \quad \text{und} \quad f_x = m\Delta f_x, \quad \text{mit} \quad \Delta f_x = \frac{1}{N_x\Delta x} \quad (3.1a)$$

$$y = l\Delta y \quad \text{und} \quad f_y = n\Delta f_y, \quad \text{mit} \quad \Delta f_y = \frac{1}{N_y\Delta y} \quad (3.1b)$$

Für die diskrete Formulierung der CVM ergibt sich somit

$$U_z(j\Delta x, l\Delta y) = \exp[ikz] \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{U_0(j\Delta x, l\Delta y)\} \exp \left[ -i\pi\lambda z \left( \frac{m^2}{N_x^2\Delta x^2} + \frac{n^2}{N_y^2\Delta y^2} \right) \right] \right\} \quad (3.2)$$

Unter Verwendung einer diskreten zweidimensionalen Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  bzw. der inversen Transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  ist nun Gleichung (3.2) vollständig beschrieben und kann problemlos numerisch implementiert werden. Für die Transformation wurde in dieser Arbeit neben der Bibliothek *FFTW* von Matteo Frigo und Steven G. Johnson [130] auch die *CUFFT*-Bibliothek von Nvidia [131] eingesetzt.

### 3.1.2 Deterministische Phasenrekonstruktion

Wie bereits Anhand der CVM im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, gilt es die in Abschnitt 2.3.2 entwickelte Gleichung zur deterministischen Phasenrekonstruktion mit Hilfe eines Algorithmus zu beschreiben. Dabei soll aufgezeigt werden, wie dies unter Berücksichtigung der in Gleichung (2.9) eingeführten Randbedingungen möglich ist.

#### Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen

Ausgangspunkt der Diskretisierung ist die in Abschnitt 2.3.2 eingeführte Gleichung

$$\begin{aligned} \Phi_z(\mathbf{r}) &= \Phi_z^x(\mathbf{r}) + \Phi_z^y(\mathbf{r}) \\ \Phi_z^x(\mathbf{r}) &= -k \int_R \left\{ \left[ \frac{1}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} G^{x''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \right] G^{x'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \\ \Phi_z^y(\mathbf{r}) &= -k \int_R \left\{ \left[ \frac{1}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} G^{y''}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \right] G^{y'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

Wie dort bereits erwähnt, wurde in der Gleichung noch keinerlei Annahme über die Randbedingungen getroffen. Dies ermöglicht eine spezifische Anpassung der Randbedingungen an das zu untersuchende Objekt. Einerseits ist es möglich, die Lösung der Gleichung unter Verwendung von Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen zu implementieren [41, 53]. Andererseits können aufgrund der Formulierung der Gleichung gemischte Randbedingungen verwirklicht werden, indem eine an das Objekt angepasste Kombination der bereits eingeführten Funktionen  $G_D^{x'}$ ,  $G_D^{y'}$ ,  $G_N^{x'}$  und  $G_N^{y'}$  aus den Gleichungen (2.11)-(2.14) verwendet wird [42]. Demzufolge gestaltet es sich relativ simpel, einen Algorithmus umzusetzen, der zum Beispiel Dirichlet-Randbedingungen in  $x$ -Richtung und Neumann-Randbedingungen in  $y$ -Richtung, oder umgekehrt, aufweist.



Eine ausführliche Herleitung zur Berechnungsvorschrift der Gradienten unter Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit in den Anhang A.2 verschoben. Durch die Wahl entsprechender Randbedingungen ergeben sich, wie im Anhang erläutert (siehe Abschnitte A.2.5 und A.2.6), verschiedene Lösungsalgorithmen. Um die Anzahl der Formeln an dieser Stelle möglichst gering zu halten, soll hier nur die endgültige Rechenvorschrift für ein rechteckige Fläche der Größe  $R = a \times b$ , unter Dirichlet-Randbedingungen angegeben werden.

$$\Phi_{z,D}(x, y) = \Phi_{z,D}^x(x, y) + \Phi_{z,D}^y(x, y) \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{z,D}^x(x, y) = & \frac{2}{a} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_x [b - y])}{\sinh(f_x b)} \int_0^y \left\{ \sinh(f_x y') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \{ \Phi_{z,D}^{x'}(x', y') \} \right] \right\} dy' \right\} \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_x y)}{\sinh(f_x b)} \int_y^b \left\{ \sinh(f_x [b - y']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \{ \Phi_{z,D}^{x'}(x', y') \} \right] \right\} dy' \right\} \right] \right\} \quad (3.4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{z,D}^y(x, y) = & \frac{2}{b} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_y [a - x])}{\sinh(f_y a)} \int_0^x \left\{ \sinh(f_y x') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \{ \Phi_{z,D}^{y'}(x', y') \} \right] \right\} dx' \right\} \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_y x)}{\sinh(f_y a)} \int_x^a \left\{ \sinh(f_y [a - x']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \{ \Phi_{z,D}^{y'}(x', y') \} \right] \right\} dx' \right\} \right] \right\} \quad (3.4c) \end{aligned}$$

wobei die beiden Funktionen  $\Phi_{z,D}^{x'}(x', y')$  und  $\Phi_{z,D}^{y'}(x', y')$  dem Gradienten der Phasenverteilung  $\nabla_{T'} \Phi_{z,D} = (\Phi_{z,D}^{x'}, \Phi_{z,D}^{y'})$  mit Dirichlet-Randbedingungen entsprechen. Wie ebenfalls im Anhang gezeigt, ist in diesem Fall die Ableitung der Phasenverteilung in  $x'$ - und  $y'$ -Richtung durch

$$\begin{aligned} \Phi_{z,D}^{x'}(x', y') &= \frac{k}{I_z(x', y')} \frac{2}{a} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_x [b - y'])}{\sinh(f_x b)} \int_0^{y'} \left\{ \sinh(f_x y'') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dy'' \right\} \right] \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_x y')}{\sinh(f_x b)} \int_{y'}^b \left\{ \sinh(f_x [b - y'']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dy'' \right\} \right] \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{z,D}^{y'}(x', y') &= \frac{k}{I_z(x', y')} \frac{2}{b} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_y [a - x'])}{\sinh(f_y a)} \int_0^{x'} \left\{ \sinh(f_y x'') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dx'' \right\} \right] \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_y x')}{\sinh(f_y a)} \int_{x'}^a \left\{ \sinh(f_y [a - x'']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dx'' \right\} \right] \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

gegeben.

In den beiden Gleichungen (3.5) und (3.6) ist zu sehen, dass die Ableitung der Intensität  $\partial I_z(x'', y'')/\partial z$  noch nicht durch den Differenzenquotienten genähert worden ist, wie es bereits in Gleichung (2.25) eingeführt wurde. Dies geschah nur, um die Darstellung der Formeln übersichtlicher zu gestalten. Selbstverständlich muss innerhalb des Lösungsalgorithmus

$$\frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \approx \frac{I_+(x'', y'') - I_-(x'', y'')}{\Delta z}$$

gesetzt werden. Um die Gleichungen (3.4)-(3.6) in einen implementierbaren Algorithmus umzuschreiben, müssen, wie im vorherigen Abschnitt, die Gleichungen in ihre diskreten Formen überführt werden. Dies bedeutet wiederum, dass die kontinuierlichen Koordinaten im Orts- und Frequenzbereich durch diskrete Koordinaten zu ersetzen sind. Ebenfalls gilt es, die in den Gleichungen vorhandenen Integrale durch diskrete Summen auszudrücken. Die diskreten Darstellungen der Orts- und Frequenzkoordinaten wurden bereits in Gleichung (3.1) eingeführt und können somit direkt in obige Gleichungen eingesetzt werden. Der Einfachheit halber soll davon ausgegangen werden, dass die Abtastintervalle im Ortsraum in  $x$ - und  $y$ -Richtung gleich groß sind ( $\Delta x = \Delta y$ ). Unter Verwendung der diskreten Koordinaten und nach Überführung der Integrale in diskrete Summen ergibt sich ein Ablaufplan für das Computerprogramm zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_{z,D}(x, y)$  mit Dirichlet-Randbedingungen, welcher in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Wie aus der Grundgleichung (3.4) ersichtlich, lässt sich die Berechnung in zwei unabhängige Teile gliedern. Das Gesamtergebnis ergibt sich dann durch Addition der beiden Teillösungen  $\Phi_{z,D}^x(x, y)$  und  $\Phi_{z,D}^y(x, y)$ . Die Bezeichnungen der Funktionen in Abbildung 3.1 entsprechen denen der Herleitung der Gleichung aus Abschnitt A.2. Lediglich die kontinuierlichen Koordinaten wurden diskret formuliert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde im Ablaufplan die Funktion  $g_D$  verwendet. Diese ist bereits im Abschnitt A.2.4 eingeführt worden und beinhaltet die *sinh*-Terme. Die eindimensionalen Fourier-Transformationen  $\mathcal{F}_x$ ,  $\mathcal{F}_y$ ,  $\mathcal{F}_{f_x}^{-1}$  und  $\mathcal{F}_{f_y}^{-1}$ , welche zur Berechnung nötig sind, wurden im Ablaufplan durch  $FFT\{\dots\}_j$ ,  $FFT\{\dots\}_l$ ,  $FFT^{-1}\{\dots\}_m$  und  $FFT^{-1}\{\dots\}_n$  symbolisiert. Die Indizes stehen dabei für die zu transformierende diskrete Koordinate bzw. Raumrichtung. Für die Berechnung einer Teillösung sind demnach neben einfachen Skalierungsoperationen vier Fourier-Transformationen und zwei Summenbildungen mit der Funktion  $g_D$  bzw. den *sinh*-Termen nötig.

Ein Lösungsalgorithmus, welcher bei der Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung Neumann-Randbedingungen berücksichtigt, lässt sich analog zur Dirichlet-Methode herleiten. Die dafür notwendigen Gleichungen sind, wie bereits erwähnt, im Anhang [siehe Gleichungen (A.70), (A.71) und (A.72)] zu finden. Dennoch wird der Vollständigkeit wegen der entsprechende Ablaufplan für das Programm zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_{z,N}(x, y)$  unter Neumann-Randbedingungen in Abbildung 3.2 dargestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Lösungsverfahren unter Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen liegt nur in der Art der verwendeten Greenschen Funktion bzw. deren Gradienten. Aus diesem Grunde weisen auch die Algorithmen bzw. die Ablaufdiagramme 3.1 und 3.2 nur einen geringen Unterschied auf. Die Verschiedenheit der beider Techniken beruht im Prinzip nur darauf, dass die Funktionen  $g_D$  und  $g_N$  leicht unterschiedlich aufgebaut sind (siehe Abschnitt A.2.4) und dass der Gebrauch des Real- ( $\mathcal{R}$ ) und Imaginärteils ( $\mathcal{I}$ ) nach den Transformationen vertauscht ist. Sollen bei der

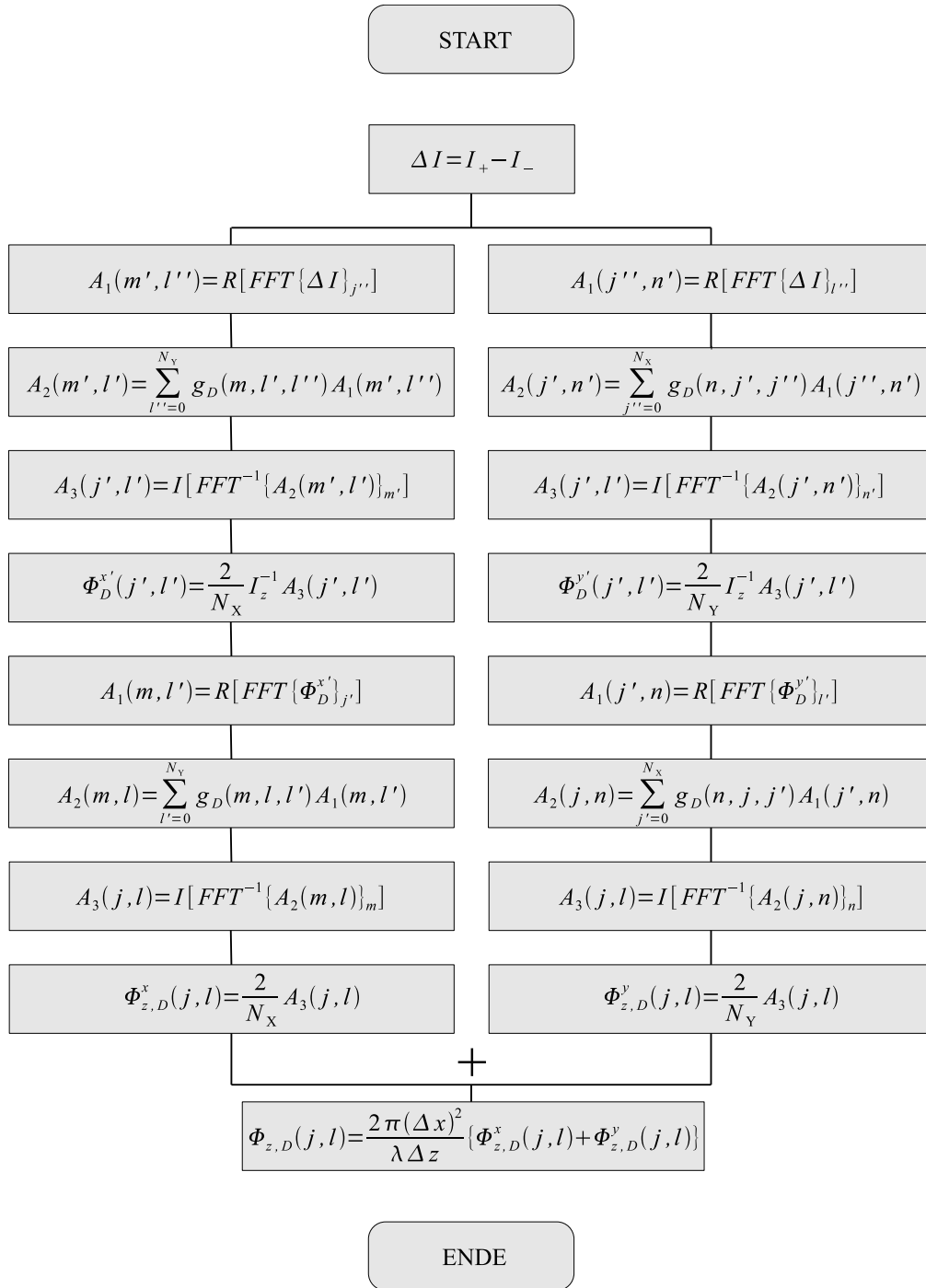


Abbildung 3.1: Ablaufplan des Programms zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_{z,D}$  mit Hilfe Greenscher Funktionen unter Dirichlet-Randbedingungen.

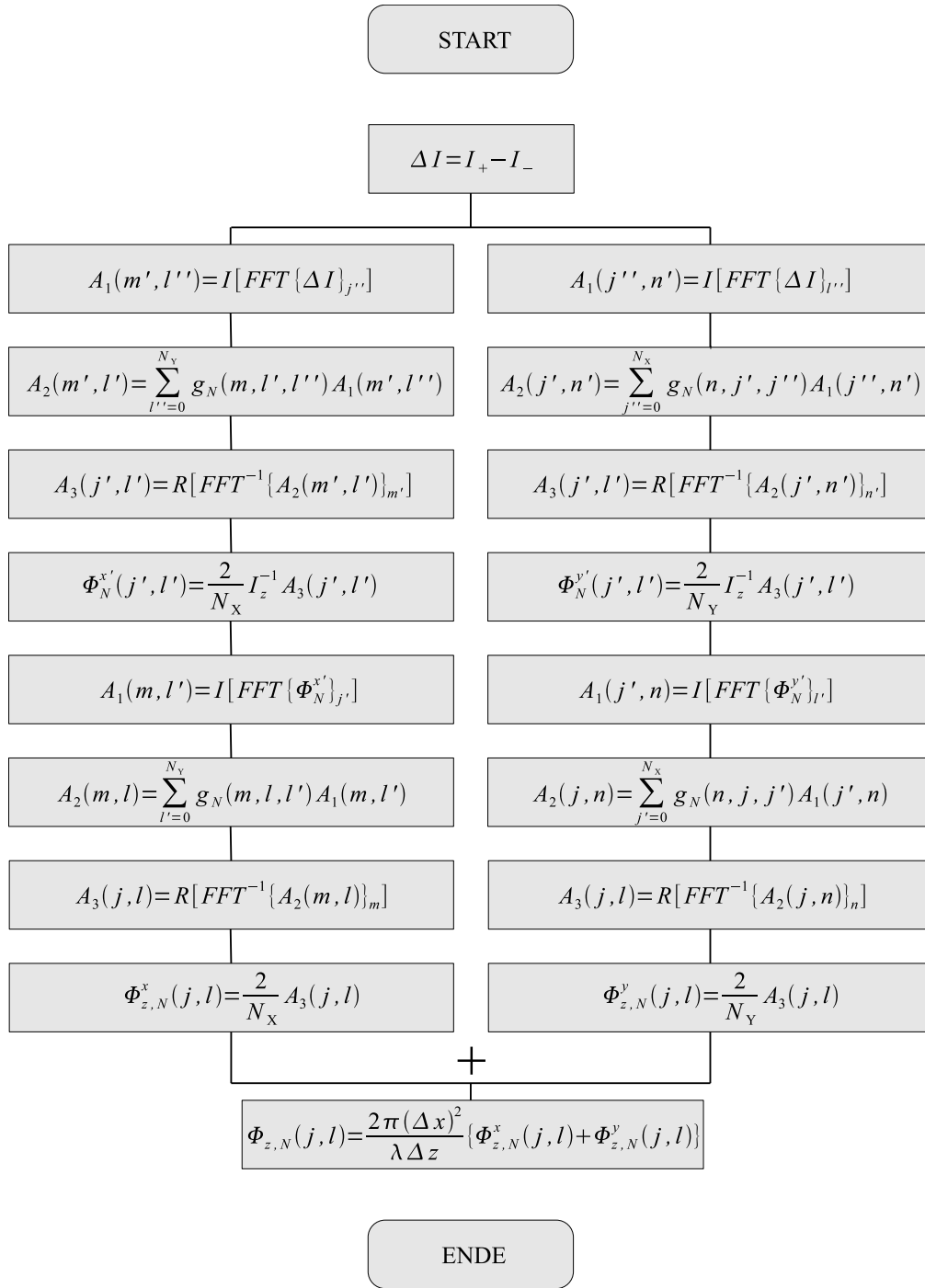


Abbildung 3.2: Ablaufplan des Programms zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_{z,N}$  mit Hilfe Greenscher Funktionen unter Neumann-Randbedingungen.

Berechnung gemischte Randbedingung berücksichtigt werden, so müssen nur die Funktionen  $g_D$  und  $g_N$  und die Verwendung der Real- und Imaginärteile im Algorithmus dementsprechend angepasst werden [42].

### Unbegrenzter freier Raum

In Abschnitt 2.3.3 wurde bewiesen, dass eine bekannte Lösung der TIE als Spezialfall in der Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen enthalten ist. Dabei galt die Annahme, dass die Fläche  $R$  unendlich ausgedehnt sei und somit keinen Rand besitzt. Als Konsequenz ergibt sich eine schnelle Berechnungsmethode auf Basis zweidimensionaler Fourier-Transformationen [siehe Gleichung (2.22)], wie es unter anderem auch in [41, 43–46] gezeigt wurde. Zur numerischen Implementierung muss die Gleichung

$$\begin{aligned}\Phi_z(x, y) &= \Phi_z^x(x, y) + \Phi_z^y(x, y) \\ \Phi_z^x(x, y) &= \frac{k}{(2\pi)^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_x}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(x, y)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_x}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial I_z(x, y)}{\partial z} \right\} \right\} \right\} \right\} \\ \Phi_z^y(x, y) &= \frac{k}{(2\pi)^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_y}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(x, y)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{f_y}{f_x^2 + f_y^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial I_z(x, y)}{\partial z} \right\} \right\} \right\} \right\}\end{aligned}$$

ebenfalls diskretisiert werden.

Um die Formel bei der Überführung in ihre diskrete Darstellung anschaulich zu halten und eine möglichst simple Form zu erzielen, werden einige Vereinfachungen vorgenommen. Dies soll nur zur besseren Übersichtlichkeit an dieser Stelle dienen aber keinerlei Einschränkung bezüglich der Gleichung machen. Es wird  $N_x = N_y = N$  und  $\Delta x = \Delta y$  gesetzt. Das Abtast raster stellt somit ein Quadrat dar, wobei die Abtastintervalle in  $x$ - und  $y$ -Richtung gleich groß sind. Daraus folgt nach Gleichung (3.1), dass auch die Abtastintervalle im Frequenzbereich gleich sind ( $\Delta f_x = \Delta f_y$ ). In der vereinfachten Version, mit quadratischem Raster und gleichen Abtastintervallen in  $x$ - und  $y$ -Richtung, ergibt sich für den Fall der diskreten Darstellung

$$\frac{f_x}{f_x^2 + f_y^2} = N \Delta x \frac{m}{m^2 + n^2}, \quad \text{mit} \quad -\frac{N}{2} \leq m, n < \frac{N}{2} \quad (3.8a)$$

$$\frac{f_y}{f_x^2 + f_y^2} = N \Delta x \frac{n}{m^2 + n^2}, \quad \text{mit} \quad -\frac{N}{2} \leq m, n < \frac{N}{2} \quad (3.8b)$$

Diese beiden Ausdrücke werden im Weiteren als Filter bezeichnet, da sie im Frequenzbereich wie Filterfunktionen mit dem Spektrum multipliziert werden.

Nach Ersetzen der Wellenzahl  $k$  durch  $2\pi/\lambda$ , der Ableitung der Intensität durch den Differenzenquotienten aus Gleichung (2.25) und der kontinuierlichen Koordinaten durch ihre diskreten Ausdrücke [siehe Gleichung (3.1)] stellt sich die Lösung für den unbegrenzten freien Raum in

diskreter Form folgendermaßen dar:

$$\Phi_z(j\Delta x, l\Delta x) = \Phi_z^x(j\Delta x, l\Delta x) + \Phi_z^y(j\Delta x, l\Delta x) \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_z^x(j\Delta x, l\Delta x) = & \frac{(N\Delta x)^2}{2\pi\lambda\Delta z} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{m}{m^2 + n^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(j\Delta x, l\Delta x)} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{m}{m^2 + n^2} \mathcal{F} \{ I_+(j\Delta x, l\Delta x) - I_-(j\Delta x, l\Delta x) \} \right\} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.9b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_z^y(j\Delta x, l\Delta x) = & \frac{(N\Delta x)^2}{2\pi\lambda\Delta z} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{n}{m^2 + n^2} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{I_z(j\Delta x, l\Delta x)} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{n}{m^2 + n^2} \mathcal{F} \{ I_+(j\Delta x, l\Delta x) - I_-(j\Delta x, l\Delta x) \} \right\} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.9c)$$

Die Phasenverteilung  $\Phi_z$  ergibt sich als Summe der beiden Teillösungen  $\Phi_z^x$  und  $\Phi_z^y$ . Die Teillösungen unterscheiden sich dabei nur in der Art der jeweiligen Filterfunktion, da diese je nach Richtung eine  $m$ - bzw.  $n$ -Abhängigkeit im Zähler aufweisen [siehe Gleichung (3.8)]. Aus Gleichung (3.9) ist ersichtlich, dass zur Berechnung jeder Teillösung vier Fourier-Transformationen nötig sind. Aufgrund der Linearität der Fourier-Transformationen [16] können die jeweils erste und letzte Transformation der Teillösungen gemeinsam ausgeführt werden. Die Gesamtzahl an Fourier-Transformationen kann somit von acht auf sechs verringert und die Rechenzeit verkürzt werden. Die Berechnung mit Hilfe von nur sechs Transformationen stellt, im Vergleich zu der von Nugent et al. publizierten Technik [44, 45], eine Alternative und vor allem schnellere Variante eines Lösungsalgorithmus dar. Der genaue Ablauf des Programms, im Falle eines quadratischen Abtastrasters mit gleichen Abtastintervallen in  $x$ - und  $y$ -Richtung, ist in Abbildung 3.3 zu finden.

An dieser Stelle soll nochmals auf die beiden Filterfunktionen aus Gleichung (3.8) eingegangen werden. Die Terme  $m/(m^2 + n^2)$  und  $n/(m^2 + n^2)$  ergeben sich nach Gleichung (2.21) aus der Fourier-Transformation des Gradienten der Greenschen Funktion des unbegrenzten freien Raumes. Wie in den Formeln für die Filter ersichtlich, weisen sie beide für die Stelle  $m, n = 0$  eine Singularität auf. Demnach gilt es, die Funktionen auf diese Polstelle hin zu untersuchen. Ein geeignetes Mittel zur Entwicklung von Funktionen um Singularitäten ist die Laurent-Reihe [115]. Mit Hilfe dieser Reihenentwicklung kann gezeigt werden, dass der Wert der Terme  $m/(m^2 + n^2)$  und  $n/(m^2 + n^2)$  an der Stelle  $m, n = 0$  in den Funktionswert Null konvergiert. Dies bedeutet, dass bei den Filterfunktionen die Division durch Null durch eine Multiplikation mit Null zu ersetzen ist [45, 129, 132, 133].

Um die diskrete Darstellung zur Rekonstruktion der Phasenverteilung unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes möglichst simpel und übersichtlich zu gestalten, wurde, wie eingangs erwähnt, davon ausgegangen, dass das Abtastraster quadratisch ist und die Abtastintervalle in  $x$ - und  $y$ -Richtung gleich groß sind. Dies ist natürlich ein Sonderfall, der die Lösungsgleichung in ihrer Form vereinfacht. Der Vollständigkeit wegen sollen die Filterfunktionen deshalb noch in ihrer allgemeinen Form angeführt werden. Sie ergeben sich, nach Gleichung (3.1), bei ungleichen

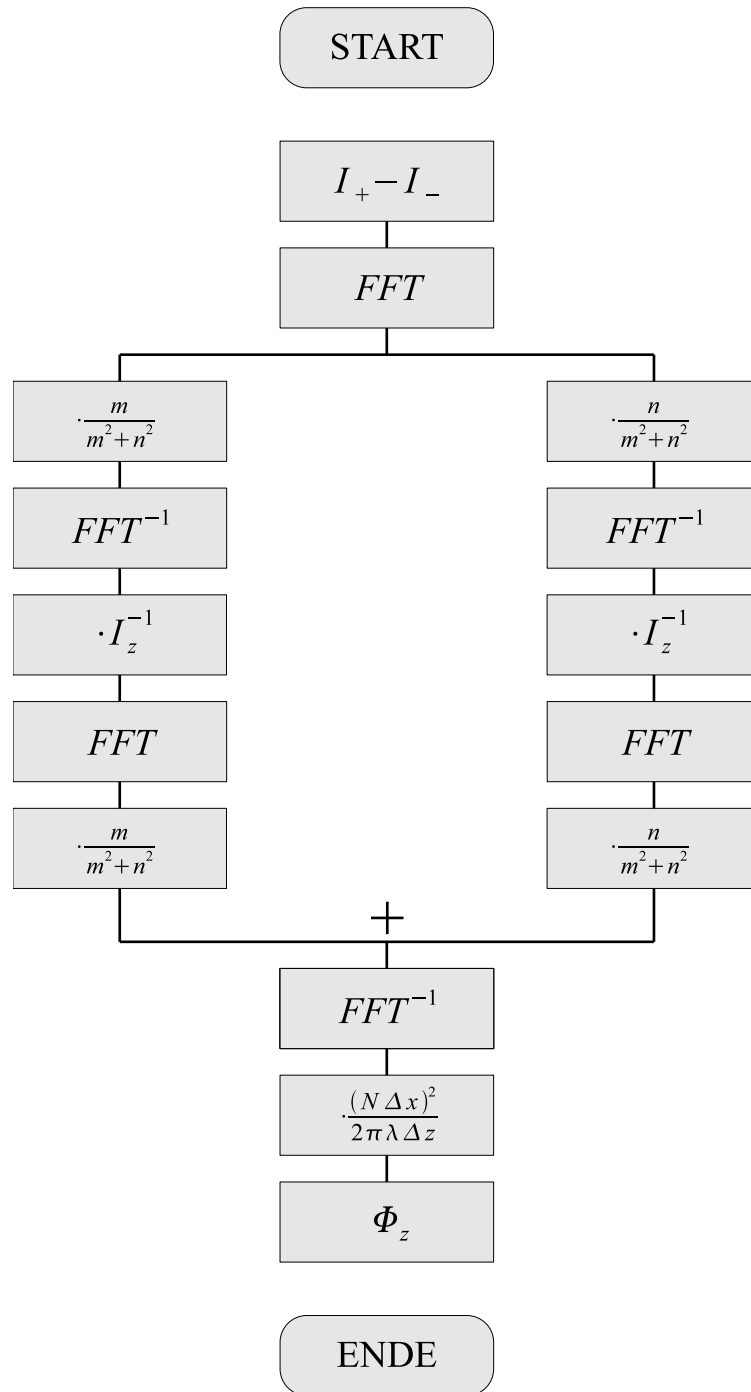


Abbildung 3.3: Ablaufplan des Programms zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung  $\Phi_z$  mit Hilfe Greenscher Funktionen unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes.

Seitenverhältnissen und unterschiedlichen Abtastintervallen in den beiden Raumrichtungen, zu

$$\frac{f_x}{f_x^2 + f_y^2} = \frac{\Delta x N_x (\Delta y N_y)^2 m}{(\Delta y N_y m)^2 + (\Delta x N_x n)^2}, \quad \text{mit} \quad -\frac{N_x}{2} \leq m < \frac{N_x}{2}; \quad -\frac{N_y}{2} \leq n < \frac{N_y}{2} \quad (3.10a)$$

$$\frac{f_y}{f_x^2 + f_y^2} = \frac{\Delta y N_y (\Delta x N_x)^2 n}{(\Delta y N_y m)^2 + (\Delta x N_x n)^2}, \quad \text{mit} \quad -\frac{N_x}{2} \leq m < \frac{N_x}{2}; \quad -\frac{N_y}{2} \leq n < \frac{N_y}{2} \quad (3.10b)$$

Die obigen Filterfunktionen sind etwas komplizierter als die in Gleichung (3.8) angeführten. Für die Implementierung des Lösungsalgorithmus macht dies allerdings kaum einen Unterschied. Die Skalierung  $(N\Delta x)^2 / (2\pi\lambda\Delta z)$ , wie sie in Gleichung (3.9) zu finden ist, ist im quadratischen Fall für beide Richtungen gleich und kann damit aus der Formel ausgeklammert werden. Sie kann anschließend, wie im Ablaufplan des Programms (siehe Abbildung 3.3) zu sehen, als Faktor mit dem Ergebnis multipliziert werden. Dies ist im allgemeinen Fall der Filterfunktionen nach Gleichung (3.10) nicht mehr möglich. Die Gewichtungen in Abhängigkeit von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $N_x$  und  $N_y$  müssen direkt mit dem Filter verrechnet werden. Die gemeinsame Skalierung beider Teillösungen würde im diesem Fall dann nur noch den Term  $1/(2\pi\lambda\Delta z)$  beinhalten.

Ein Vergleich zwischen den Ablaufdiagrammen zur Berechnung der Phasenverteilung unter Berücksichtigung von Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen (siehe Abbildungen 3.1 und 3.2) und der Berechnung unter der Annahme des unbegrenzten freien Raumes (Abbildung 3.3) zeigt, dass es bei den Ersteren deutlich mehr Rechenschritte bedarf. Andererseits sind die Fourier-Transformationen beim Ablauf 3.3 zweidimensional, während die in Variante 3.1 und 3.2 verwendeten Transformationen nur eindimensional sind und deshalb deutlich weniger Rechenoperationen beinhalten.

## 3.2 Simulationen

Um die Funktionalität der vorgestellten Lösungsalgorithmen zu überprüfen, wurden mehrere künstliche Objekte mit unterschiedlichen Eigenschaften simuliert. Neben der Überprüfung der Algorithmen bietet die Rekonstruktion künstlicher Objekte eine erste Möglichkeiten, die Güte des Verfahrens auf reale Objekte ähnlicher Form abzuschätzen. Bei den Testobjekten handelt es sich zum einen um reine Phasenobjekte von verschiedener Form und Struktur mit konstanter Amplituden-, aber einer örtlich variierenden Phasenverteilung. Zum anderen wird auch ein Objekt mit amplitudenmodulierenden Anteilen untersucht, da absorbierende Objekte die Herleitung der Phasenrekonstruktion nach Abschnitt 2.4.2 verletzen. Die Intensitätsverteilungen  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  aus unterschiedlichen Ebenen, welche als Eingangsdaten für die Lösungsalgorithmen dienen [siehe Gleichung (2.25)], wurden mit Hilfe der bereits vorgestellten CVM (siehe Abschnitt 3.1.1) generiert. Dafür wurde das komplexe Feld des Objektes in verschiedene Entfernungen  $z$  propagiert und anschließend das Betragsquadrat gebildet. Die Intensitätsverteilung des originalen Feldes, ohne Propagation, stellt dabei die fokussierte Aufnahme  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  des Objektes dar. Die Parameter der Simulationen wurden dabei so gewählt, dass sie den realen experimentellen Bedingungen, welche in den Kapiteln 4 und 5 eingeführt werden, möglichst nahe kommen.



### 3.2.1 Sphärische Phasenstörung

Als erstes Testobjekt dient eine sphärische Phasenstörung. Mit Hilfe dieser Phasenverteilung können die Algorithmen in Bezug auf simple Objektgeometrien hin bewertet werden. Die si-

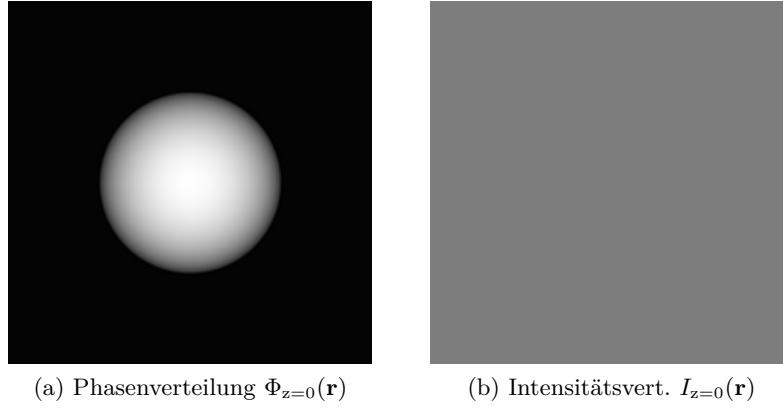


Abbildung 3.4: Phasen- und Intensitätsverteilung eines sphärischen Phasenobjektes: Abbildung (a) zeigt die Phasenverteilung mit Phasenwerten von  $[0; 1]$  *rad*. In (b) ist die konstante Intensitätsverteilung des Objektes mit  $I_{z=0}(\mathbf{r}) \neq 0$  zu sehen.

mulierte Sphäre mit einem Radius von  $65,5\mu m$  wurde so im Bildfeld positioniert, dass um sie herum eine homogene Hintergrundphase von Null vorhanden war. Die künstliche Phasenverteilung, zu sehen in Abbildung 3.4(a), steigt zum Mittelpunkt des Feldes kugelförmig an und erreicht dort ein Maximum von  $1\text{ rad}$ . Der Farbverlauf von schwarz nach weiß entspricht dabei Phasenwerten von  $[0; 1]$  *rad*. Eine Phasenverteilung dieser Art ergibt sich zum Beispiel, wenn

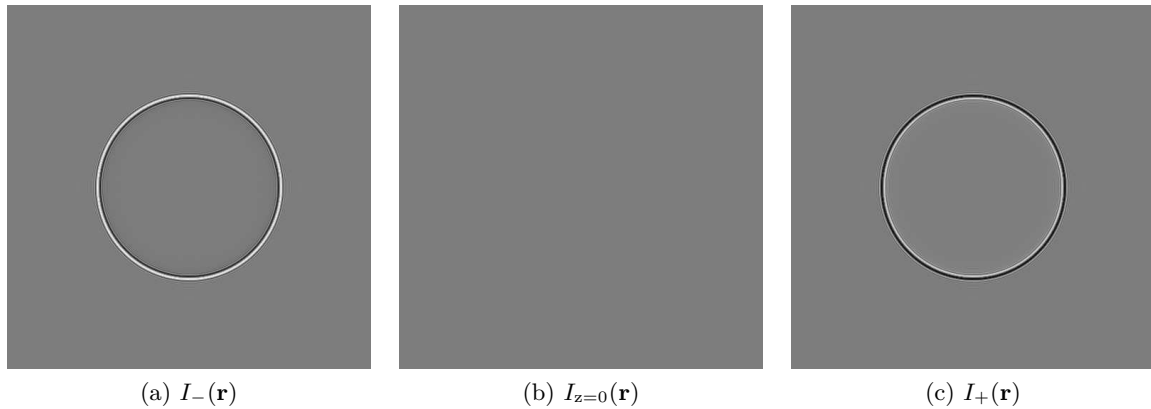


Abbildung 3.5: Drei simulierte Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen bei einer sphärischen Phasenstörung: Abbildung (a) zeigt die Aufnahme aus der Ebene  $z = -9\mu m$ , (b) das Fokusbild aus der Ebene  $z = 0$  und (c) das Bild aus der Ebene  $z = +9\mu m$ .

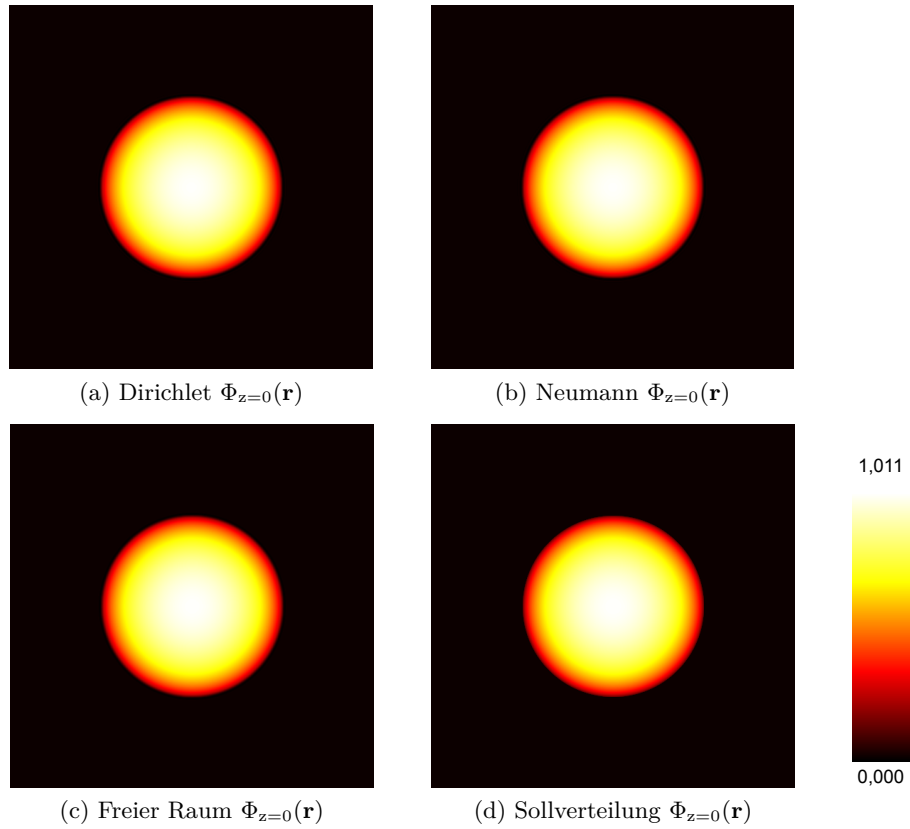


Abbildung 3.6: Ergebnisse der Phasenrekonstruktion bei einer sphärischen Phasenverteilung: Abbildung (a) zeigt die Rekonstruktion im Falle von Dirichlet- und (b) unter Neumann-Randbedingungen. Die Verteilung unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes ist in (c) zu sehen. Zum Vergleich ist in (d) die Sollverteilung aus Abbildung 3.4(a) in Falschfarben dargestellt. Die Farbskala rechts zeigt die Zuordnung der rekonstruierten Phasenwerte  $[0; 1,011]$  *rad*.

eine Glaskugel in ein Medium mit höherer Brechzahl eingebettet wird (siehe Abschnitt 5.1.1). Die konstante Intensitätsverteilung  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  des reinen Phasenobjektes, dargestellt in Abbildung 3.4(b), wurde dabei so gewählt, dass  $I_{z=0}(\mathbf{r}) \neq 0$  erfüllt ist. Dies stellt nach Abschnitt 2.4.2 eine Grundvoraussetzung des vorgestellten Lösungsverfahrens dar. In Abbildung 3.5 sind die drei simulierten Intensitätsverteilungen zu sehen. Diese wurden, wie eingangs beschrieben, mit Hilfe der CVM berechnet. Die Parameter der Simulation waren: Wellenlänge  $\lambda = 589nm$ , Pixelgröße  $\Delta x = 6,45\mu m$ , Defokusdistanz  $\Delta z/2 = \pm 9\mu m$ , Vergrößerung des optischen Aufnahmesystems  $V = 12,6\times$  und Pixelanzahl  $N_x, N_y = 512$ . Die Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung erfolgte mit den in den Abbildungen 3.1, 3.2 und 3.3 gezeigten Algorithmen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.6 zusammengestellt. Wie zu sehen, rekonstruieren alle drei Lösungsverfahren die richtige Phasenfunktion und weisen außerdem qualitativ keine Unterschiede auf. Um die Güte der Rekonstruktionen auch quantitativ zu bewerten, zeigen die Abbildung 3.7(a), 3.7(b) und

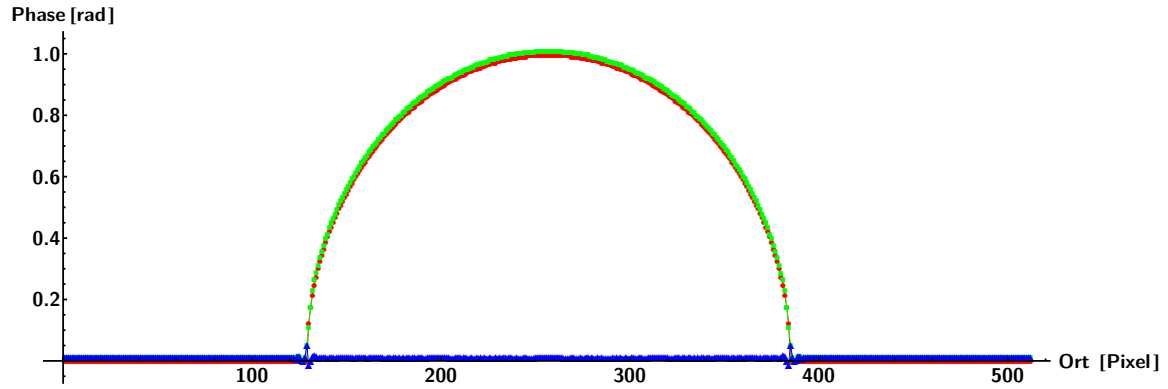
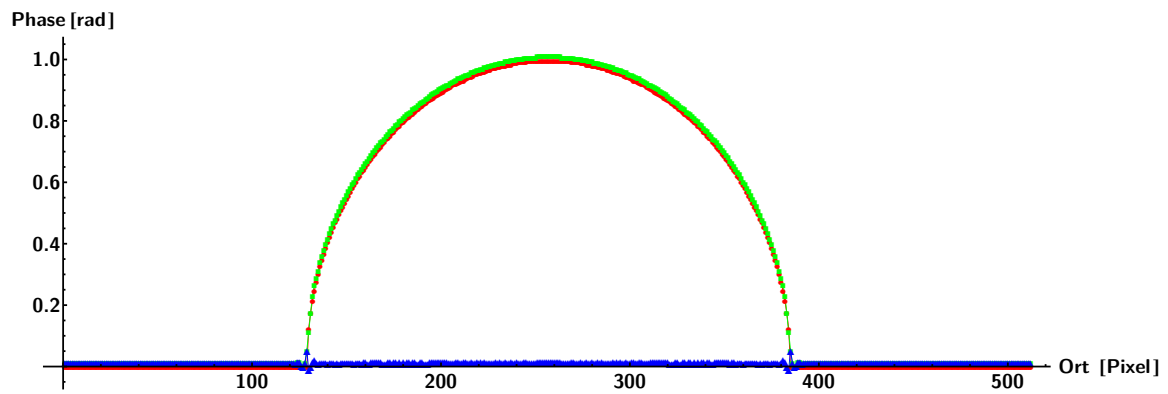
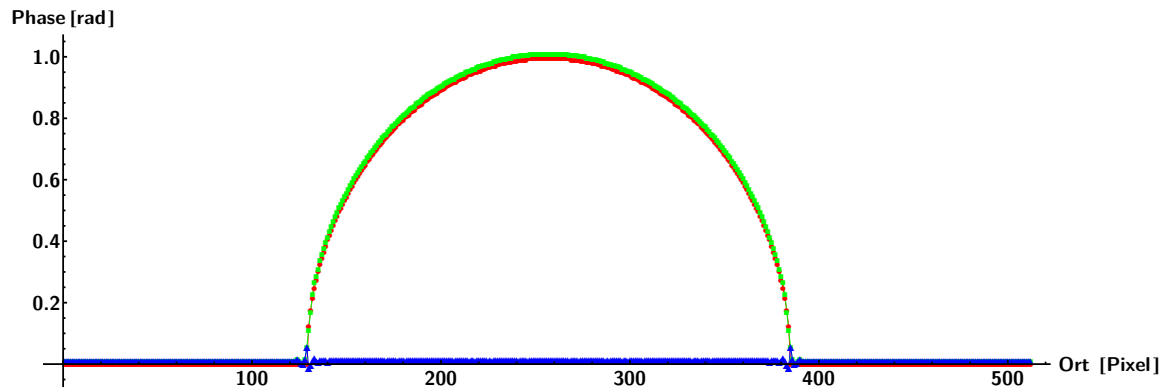
(a) Dirichlet  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$ (b) Neumann  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$ (c) Freier Raum  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$ 

Abbildung 3.7: Exemplarische horizontale Schnittlinie durch die vorgegebene sphärische Phasenverteilung aus 3.6(d) (rot, Kreis) und die rekonstruierte Verteilung (grün, Quadrat): (a) Dirichlet-, (b) Neumann-Randbedingung und (c) unbegrenzten freien Raum. Der Schnitt erfolgte jeweils in der Mitte der Bilder ( $N_y = 256$ ). Die Differenz (blau, Dreieck) zeigt den Unterschied zwischen Sollverteilung und Rekonstruktion.

3.7(c) eine exemplarische Schnittlinie (grün, Quadrat) durch die rekonstruierten Verteilungen aus den Abbildungen 3.6(a), 3.6(b) und 3.6(c). Der Schnitt erfolgte dabei jeweils horizontal durch die Mitte des Bildes bei  $N_y = 256$  und enthält somit das Maximum der Störung. Neben dem Schnitt durch die Rekonstruktion ist in den Abbildungen auch ein entsprechender Schnitt durch die vorgegebene Phasenverteilung aus Abbildung 3.6(d) (rot, Kreis) enthalten. Die Differenz der beiden Funktionen (blau, Dreieck) zeigt, dass die Rekonstruktion und die vorgegebene Phasenverteilung in allen drei Fällen nahezu gleich ist. Die Form der sphärischen Störung kann ohne weiteres rekonstruiert werden. Allerdings weisen die Rekonstruktionen an den Rändern der Kugel leichte Abweichungen auf. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Steigung der sphärischen Phasenverteilung am Übergang zwischen Hintergrund und Sphäre gegen unendlich geht. Diese enorme Steigung kann vom Algorithmus nicht rekonstruiert werden. Eine erweiterte quantitative Analyse der Rekonstruktionsergebnisse erfolgt in Abschnitt 3.2.4.

### 3.2.2 Glasfaser

Um die Qualität der Rekonstruktion im Falle komplexerer Objekte zu testen, wurde als zweite Simulation das Modell einer Multimode-Stufenindex-Glasfaser gewählt. Stufenindex-Glasfasern bestehen aus zwei verschiedenen Materialien (Kern und Mantel), die einen genau aufeinander abgestimmten Brechungsindex ( $n_{\text{Kern}}$  und  $n_{\text{Mantel}}$ ) besitzen [134]. In Abbildung 3.8 ist ein Längsschnitt durch eine solche Stufenindex-Faser zu sehen, wobei die Glasfaser in ein umgebendes Medium (Immersion) eingebettet ist. Die Abbildung zeigt außerdem einen exemplarischen Strahlengang: Tritt Licht innerhalb des Akzeptanzwinkels  $\alpha$  in die Glasfaser ein, so kommt es an

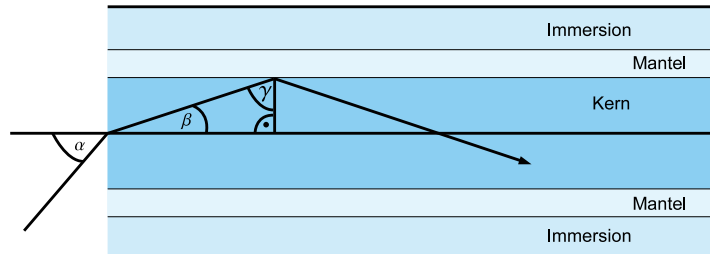


Abbildung 3.8: Längsschnitt durch eine Glasfaser parallel zur optischen Achse: Die Abbildung zeigt die beiden in der Brechzahl unterschiedlichen Glassorten der Faser (Kern, Mantel) und ein die Faser umgebende Medium (Immersion). Zu sehen ist ebenfalls ein exemplarischer Strahl, der unter dem Akzeptanzwinkel  $\alpha$  in die Glasfaser einfällt und aufgrund der Totalreflexion innerhalb der Faser weiter verläuft.

der Grenzfläche zwischen Kern und Mantel zur internen Totalreflexion und das Licht kann, mit sehr geringen Verlusten, durch die Faser übertragen werden [54]. Die Apertur  $A$  einer Glasfaser ergibt sich aus dem Sinus des Akzeptanzwinkels, welcher dem halben Öffnungswinkel entspricht. Der Akzeptanzwinkel  $\alpha$  folgt aus der Bedingung für die Totalreflexion im Inneren der Faser, in Abhängigkeit des Grenzwinkels  $\gamma$  und dem Snelliusschen Brechungsgesetz [135]. Es ergibt sich

somit

$$A = \sin \alpha = \sqrt{n_{\text{Kern}}^2 - n_{\text{Mantel}}^2} \quad (3.11)$$

Abbildung 3.9 zeigt eine Stufenindex-Glasfaser, welche von einem homogenen Medium (Immersion) umgeben ist. Die Faser wird dabei von einer ebenen Welle, welche senkrecht zur optischen Achse läuft, beleuchtet. Wie in der Abbildung dargestellt, kommt es beim Durchgang durch die Glasfaser zur Störung der ursprünglich ebenen Phasenfront. Die resultierende Phasenstörung ist dabei charakteristisch für die optischen Eigenschaften des Objektes. Die Brechzahl der Immersion ist dabei so gewählt, dass  $n_{\text{Kern}} > n_{\text{Immersion}} > n_{\text{Mantel}}$  gilt. Licht, welches die längste Strecke durch den Kern der Faser läuft, wird am stärksten in der Phase verzögert, da es aufgrund der größeren Brechzahl des Kerns den längsten optischen Weg zurück legt. Wellen, die nur durch den Mantel laufen, haben den kürzesten optischen Weg. Demnach läuft die Phase an diesen Stellen, im Bezug auf das restliche System, voraus. Da die Immersion bzw. das umgebende Medium eine

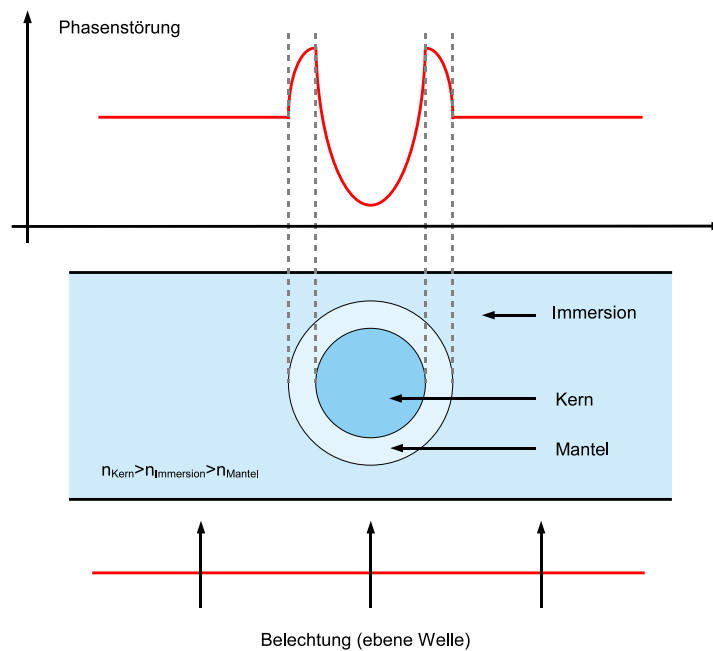


Abbildung 3.9: Phasenstörung, die durch eine Glasfaser verursacht wird: Eine ebene Wellenfront trifft auf eine Stufenindex-Glasfaser. Aufgrund der Geometrie und der Brechzahlverteilung der Faser sowie der des umgebendes Mediums (Immersion) ergibt sich die dargestellte Störung der ursprünglich ebenen Phasenfront.

Brechzahl zwischen der des Kerns und des Mantels besitzt, kann die Phase der Welle an diesen Stellen als Nulllinie angesehen werden. Die Verzögerung bzw. das Vorseilen kann somit in Bezug auf die Phasenlage der Wellen gesehen werden, welche nur durch die Immersion laufen. Aufgrund der radialsymmetrischen Form der Faser und der gegebenen Brechzahlverteilung ergibt sich die in Abbildung 3.9 gezeigte Phasenverzerrung. Um ein künstliches Objekt mit der Form einer Stufenindex-Glasfaser zu generieren, muss zuerst ein entsprechendes mathematisches

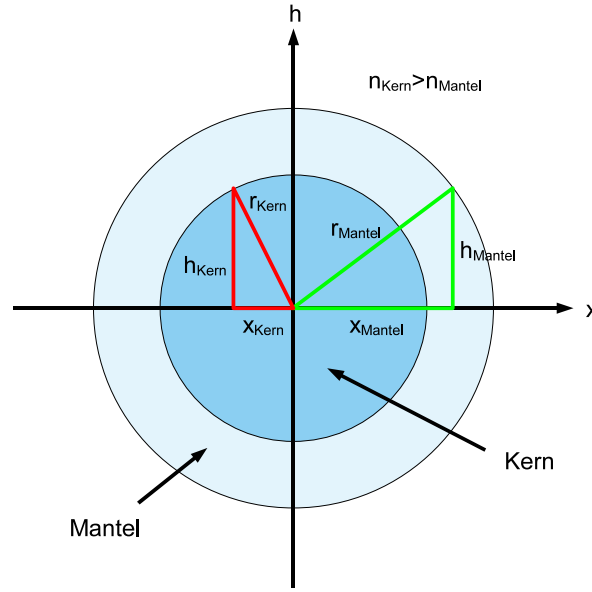


Abbildung 3.10: Querschnitt durch eine Glasfaser senkrecht zur optischen Achse: Die Abbildung zeigt den Kern und Mantel der Faser sowie die für das mathematische Modell notwendigen Größen.

Modell für die Faser erstellt werden. Dieses soll auf rein geometrischen Betrachtungen basieren. Die entscheidenden Größen zur Erstellung des Modells sind in Abbildung 3.10 eingezeichnet. Die Höhe  $h$  eines Halbkreises wird durch die Kreisfunktion in Abhängigkeit des Ortes  $x$  und dem Radius des Kreises  $r$  beschrieben:

$$h = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2} & |x| \leq r \\ 0 & |x| > r \end{cases} \quad (3.12)$$

Der optische Weg, den eine Lichtwelle beim Durchlaufen der Glasfaser zurücklegt, kann in zwei Anteile aufgespalten werden. Zum einen der Weg, der sich durch den Mantel und zum anderen der Weg, der sich durch den Kern der Faser ergibt. Unter Berücksichtigung der jeweiligen Brechungsindizes ( $n_{\text{Kern}}$ ,  $n_{\text{Mantel}}$  und  $n_{\text{Immersion}}$ ) ergibt sich für den durch Kern und Mantel zurückgelegten optischen Weg:

$$d_{\text{Kern}} = \begin{cases} 2(n_{\text{Kern}} - n_{\text{Mantel}}) \sqrt{r_{\text{Kern}}^2 - x^2} & |x| \leq r_{\text{Kern}} \\ 0 & |x| > r_{\text{Kern}} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$d_{\text{Mantel}} = \begin{cases} 2(n_{\text{Immersion}} - n_{\text{Mantel}}) \sqrt{r_{\text{Mantel}}^2 - x^2} & |x| \leq r_{\text{Mantel}} \\ 0 & |x| > r_{\text{Mantel}} \end{cases} \quad (3.14)$$

Umrechnen der optischen Weglängen in Phasen ( $\Phi = k d$ ) und anschließendes Subtrahieren der Gleichungen (3.14) und (3.13) ergibt die Formel für die von einer Stepindex-Faser verursachten Wellenfrontstörung in Abhängigkeit der geometrischen Größen und Brechzahlen:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \Phi_{\text{Mantel}} - \Phi_{\text{Kern}} \\
 &= 2k (n_{\text{Immersion}} - n_{\text{Mantel}}) \sqrt{r_{\text{Mantel}}^2 - x^2} - 2k (n_{\text{Kern}} - n_{\text{Mantel}}) \sqrt{r_{\text{Kern}}^2 - x^2} \\
 &= 2k \left\{ (n_{\text{Immersion}} - n_{\text{Mantel}}) \sqrt{r_{\text{Mantel}}^2 - x^2} + (n_{\text{Mantel}} - n_{\text{Kern}}) \sqrt{r_{\text{Kern}}^2 - x^2} \right\} \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Auf Basis von Gleichung (3.15) wurde nun die Simulation der Glasfaser vorgenommen. Für den Durchmesser des Kerns wurde  $133\mu m$ , für den des Mantels  $184\mu m$  gewählt. Die Brechzahlen wurden mit  $n_{\text{Kern}} = 1.457$ ,  $n_{\text{Mantel}} = 1.441$  und  $n_{\text{Immersion}} = 1.446$  festgelegt. Zur Berechnung der drei Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen wurde wiederum die CVM genutzt. Als Parameter dienten dabei: Wellenlänge  $\lambda = 632,8nm$ , Pixelgröße  $\Delta x = 6,45\mu m$ , Defokusdistanz  $\Delta z/2 = \pm 20\mu m$ , Vergrößerung des optischen Systems  $V = 12,6\times$  und Pixelanzahl  $N_x, N_y = 512$ . Um die Auswirkung der Orientierung der Faser auf das Messverfahren zu überprüfen, wurde das Testobjekt unter zwei verschiedenen Winkeln simuliert.

### Glasfaser vertikal

Die Phasenverteilung einer vertikal im Messfeld positionierten Glasfaser ist in Abbildung 3.11(a) zu sehen. Der durch das Objekt induzierte Phasenhub umfasst dabei Werte von  $[0; 18, 323] \text{ rad}$ . Die Abbildung zeigt die demodulierte Phasenverteilung ohne  $2\pi$  Phasensprünge [63–65]. Die kon-

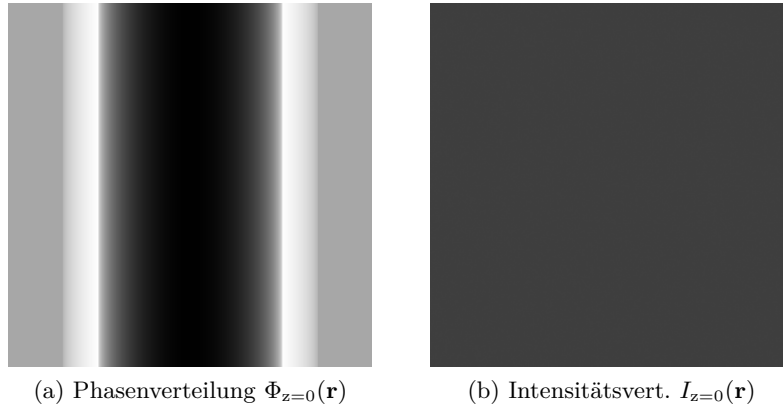


Abbildung 3.11: Phasen- und Intensitätsverteilung einer Stepindex-Glasfaser: Abbildung (a) zeigt die Phasenverteilung mit Phasenwerten von  $[0; 18, 323] \text{ rad}$ . In (b) ist die konstante Intensitätsverteilung des Objekts mit  $I_{z=0}(\mathbf{r}) \neq 0$  zu sehen.

stante Intensitätsverteilung  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  wurde wiederum so eingestellt, dass die Bedingung  $I_{z=0}(\mathbf{r}) \neq 0$  nach Abschnitt 2.4.2 erfüllt ist. Propagation des komplexen Feldes liefert die drei Intensitätsverteilungen, welche in Abbildung 3.12 zu sehen sind. So wie es von einem idealen Phasen-

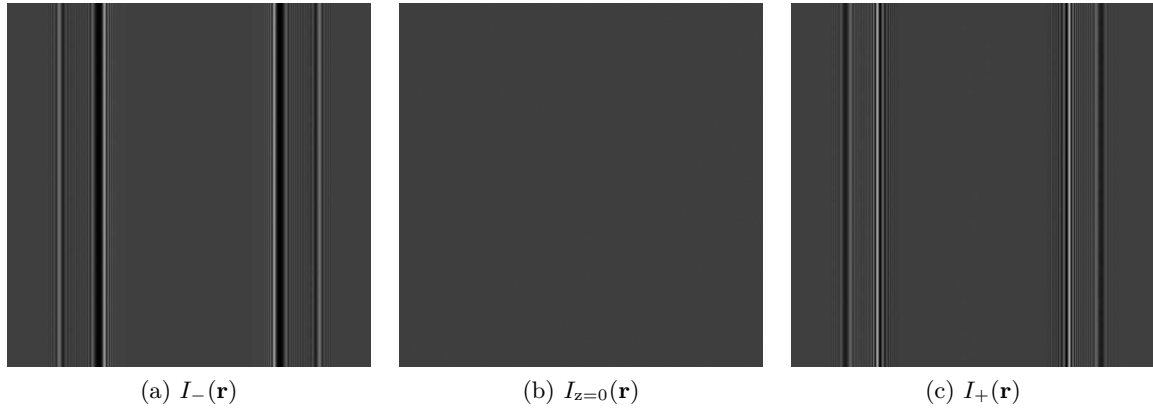


Abbildung 3.12: Drei simulierte Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen bei einer Glasfaser: Abbildung (a) zeigt die Aufnahme aus der Ebene  $z = -20\mu\text{m}$ , (b) das Fokusbild aus der Ebene  $z = 0$  und (c) das Bild aus der Ebene  $z = +20\mu\text{m}$ .

objekt zu erwarten ist, weist die Fokusaufnahme [siehe Abbildung 3.12(b)] keinerlei Amplitudenmodulation auf, während die beiden Intensitätsverteilungen aus den verschobenen Ebenen  $\pm\Delta z/2$  deutlich moduliert sind. Die Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung aus den drei Intensitätsaufnahmen aus Abbildung 3.12 wurde nur mit den beiden in den Abbildungen 3.2 (Neumann-Randbedingung) und 3.3 (unbegrenzter freier Raum) vorgestellten Algorithmen durchgeführt, da hier Dirichlet-Randbedingungen aufgrund der Geometrie des Objektes ungeeignet sind. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Abbildung 3.13 zusammengefasst. Wiederum

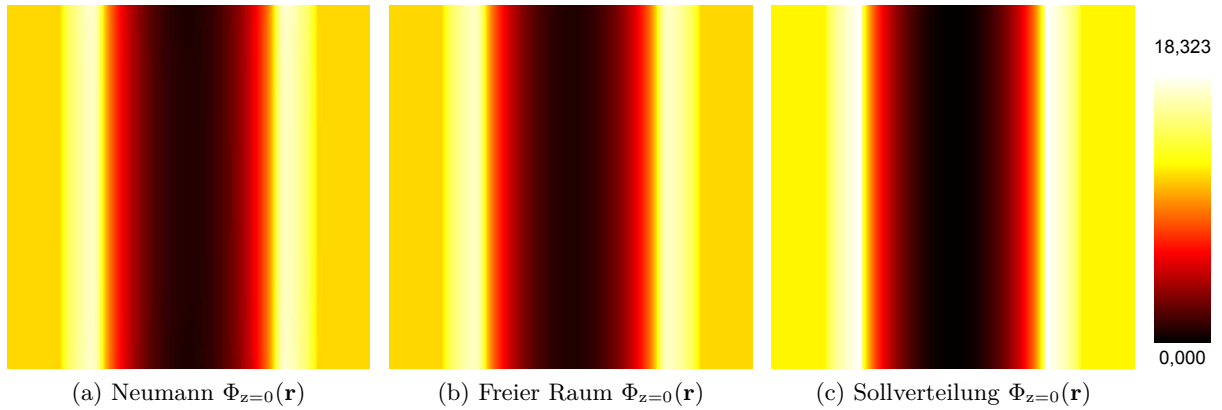
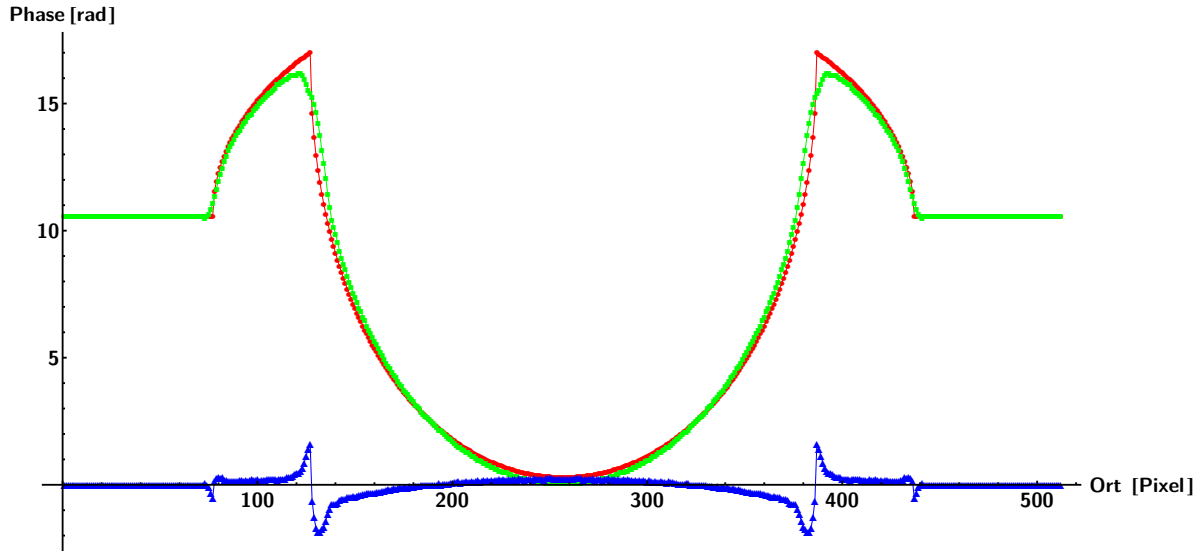


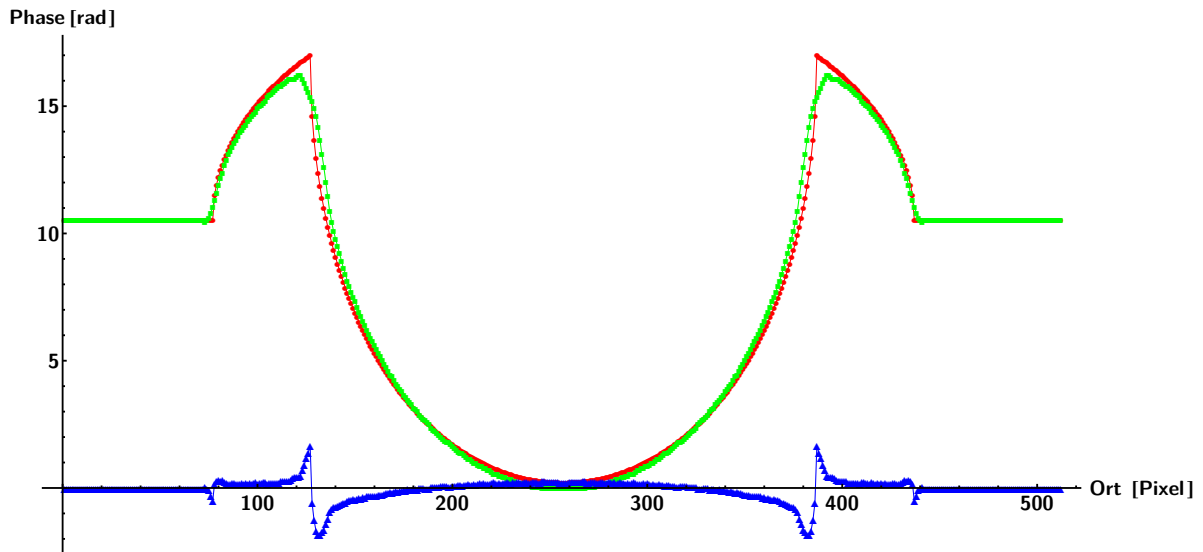
Abbildung 3.13: Ergebnisse der Phasenrekonstruktion bei einer Stepindex-Glasfaser: Abbildung (a) zeigt die Rekonstruktion im Falle von Neumann-Randbedingungen und (b) unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes. Zum Vergleich ist in (c) die Sollverteilung aus Abbildung 3.11(a) in Falschfarben dargestellt. Die Farbskala rechts zeigt die Zuordnung der rekonstruierten Phasenwerte  $[0; 18,323] \text{ rad}$ .



soll ein exemplarischer Schnitt, horizontal durch die Mitte der Abbildungen 3.13(a) und 3.13(b) ( $N_y = 256$ ) gelegt, einen Eindruck von die Qualität der Rekonstruktion vermitteln. In Abbildung



(a) Neumann  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$



(b) Freier Raum  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$

Abbildung 3.14: Exemplarische horizontale Schnittlinie durch die vorgegebene Phasenverteilung aus 3.13(c) (rot, Kreis) und die rekonstruierte Verteilung (grün, Quadrat): (a) Neumann-Randbedingung und (b) unbegrenzter freier Raum. Der Schnitt erfolgte jeweils in der Mitte der Bilder ( $N_y = 256$ ). Die Differenz (blau, Dreieck) zeigt den Unterschied zwischen Sollverteilung und Rekonstruktion.

3.14 sind diese Schnittlinien (grün, Quadrat), zusammen mit einem Schnitt durch die vorgegebene Sollverteilung (rot, Kreis) [siehe Abbildung 3.13(c)] an der gleichen Stelle zu sehen. Die Differenz zwischen Sollverteilung und Rekonstruktion (blau, Dreieck) zeigt, wie auch im Falle der sphärischen Phasenstörung, eine Abweichung vor allem im Bereich großer Gradienten. Dies ist besonders gut beim Übergang zwischen Mantel und Kern der Faser zu sehen. Aus Abbildung 3.14 ist ebenfalls ersichtlich, dass beide Verfahren, Neumann-Randbedingung und Annahme des unbegrenzten freien Raumes, vergleichbare Rekonstruktionsergebnisse liefern. Ein ausführliche Auswertung der rekonstruierten Verteilungen erfolgt in Abschnitt 3.2.4.

### Glasfaser verkippt

Im vorangegangenen Abschnitt wurde davon ausgegangen, dass die zu untersuchende Faser eine perfekt vertikale Ausrichtung innerhalb des Messfeldes aufweist. Dieser Umstand kann in der Realität aber meist nicht eingehalten werden. Deshalb soll im Folgenden untersucht werden, welche Auswirkungen eine Verkipfung der Glasfaser um einen bestimmten Winkel auf das Rekonstruktionsergebnis hat. In Abbildung 3.15 ist die Phasenverteilung einer um  $10^\circ$  zur  $x$ -Achse verkippten Glasfaser und die konstante Intensitätsverteilung  $I_{z=0}(\mathbf{r}) \neq 0$  zu sehen. Die Parameter

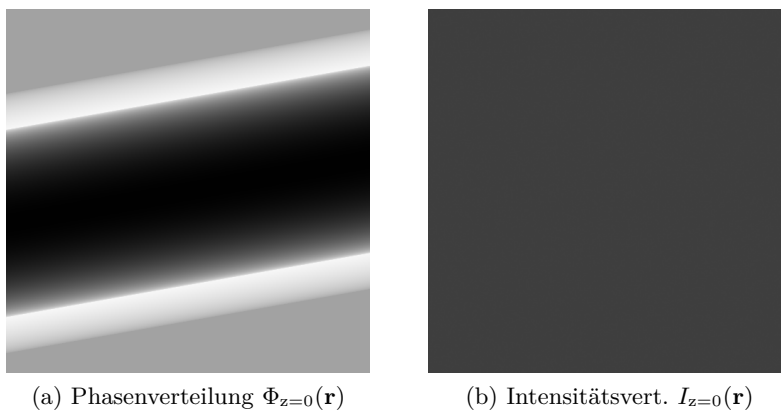


Abbildung 3.15: Phasen- und Intensitätsverteilung einer um  $10^\circ$  verkippten Stepindex-Glasfaser: Abbildung (a) zeigt die Phasenverteilung mit Phasenwerten von  $[0; 18, 323]$  rad. In (b) ist die konstante Intensitätsverteilung des Objektes mit  $I_{z=0}(\mathbf{r}) \neq 0$  zu sehen.

der Simulation sind, wie auch die der Propagation mit der CVM zur Berechnung der Intensitätsverteilungen  $I_+(\mathbf{r})$ ,  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$ , entsprechend der Stepindex-Faser aus vorherigem Abschnitt (vertikale Ausrichtung) gewählt. Eine so orientierte Glasfaser verletzt selbstverständlich die Annahme des unbegrenzten freien Raumes, da bei der Berechnung, wie in Abschnitt 2.3.3 erläutert, davon ausgegangen wird, dass die Verteilung periodisch fortgesetzt werden kann [46, 47]. Andererseits erfüllt ein solches Objekt auch nicht die Vorgaben für ein Rekonstruktionsverfahren auf Basis von Neumann-Randbedingungen. Demnach muss ein Lösungsansatz entwickelt werden, der den Randbedingungen eines so gearteten Objektes gerecht wird und somit ein Höchstmaß an Rekonstruktionsqualität gewährleistet. Eine mögliche Methode, dies umzusetzen, wurde bereit

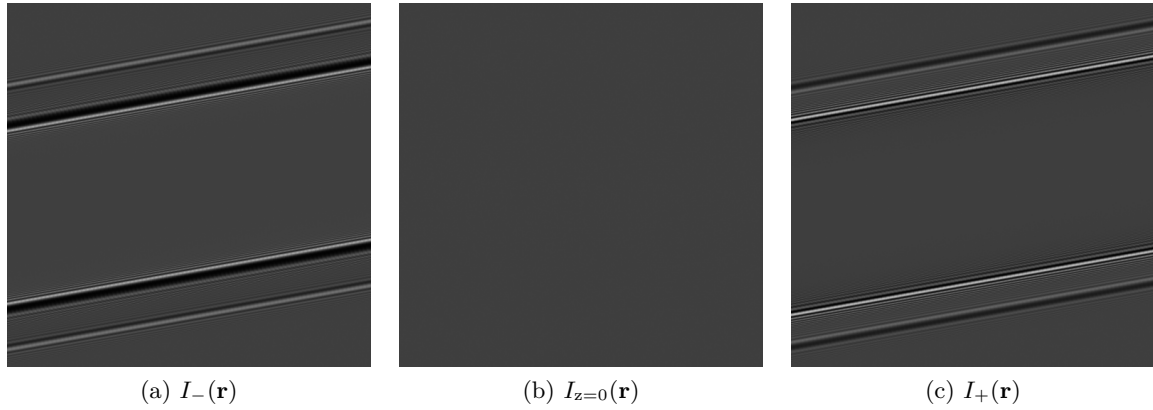


Abbildung 3.16: Drei simulierte Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen bei einer um  $10^\circ$  verkippten Glasfaser: Abbildung (a) zeigt die Aufnahme aus der Ebene  $z = -20\mu m$ , (b) das Fokusbild aus der Ebene  $z = 0$  und (c) das Bild aus der Ebene  $z = +20\mu m$ .

in Abschnitt 3.1.2 erwähnt: Der Einsatz gemischter Randbedingungen. Durch die Verwendung gemischter Randbedingungen kann eine optimal an das zu untersuchende Objekt angepasste Berechnungsvorschrift entwickelt werden. Diese erlaubt im Vergleich zu anderen herkömmlichen Methoden eine höhere Genauigkeit bei der Rekonstruktion einer solchen Phasenverteilung [42]. Die durch Propagation berechneten Intensitätsverteilungen finden sich in Abbildung 3.16. Die

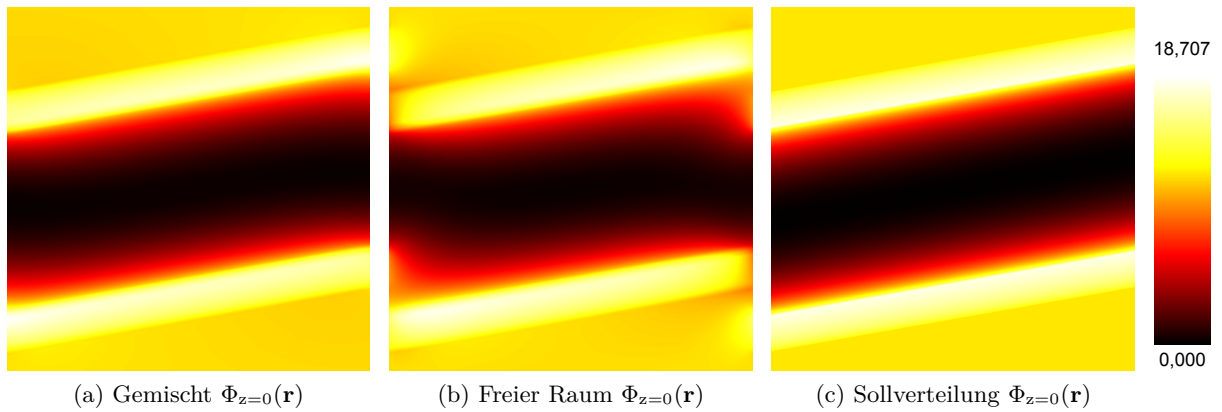
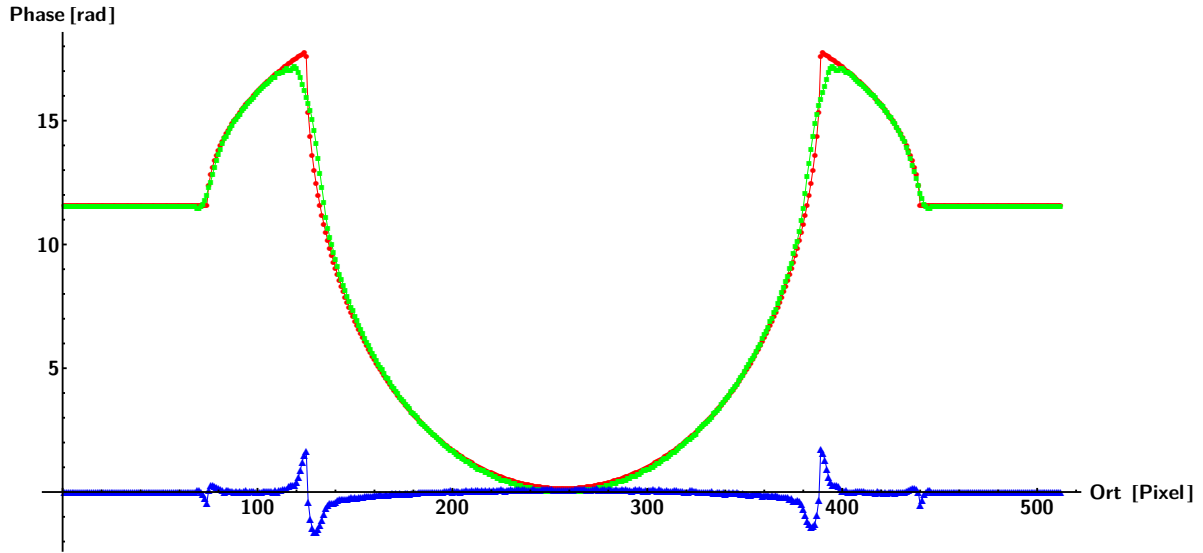
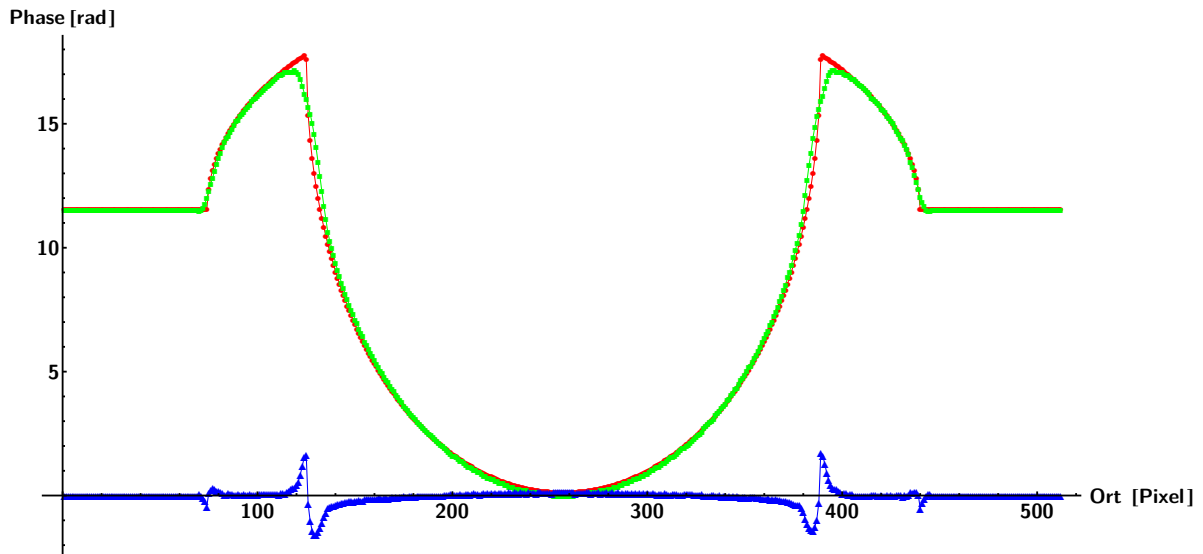


Abbildung 3.17: Ergebnisse der Phasenrekonstruktion bei einer um  $10^\circ$  verkippten Stepindex-Glasfaser: Abbildung (a) zeigt die Rekonstruktion im Falle von gemischten Randbedingungen und (b) unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes. Zum Vergleich ist in (c) die Sollverteilung aus Abbildung 3.15(a) in Falschfarben dargestellt. Die Farbskala rechts zeigt die Zuordnung der rekonstruierten Phasenwerte  $[0; 18,707]$  rad.

unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes und gemischten Randbedingungen rekonstruierten Phasenverteilungen sind in Abbildung 3.17 zu sehen. Das Rekonstruktionsverfahren mit



(a) Gemischt  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$



(b) Freier Raum  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$

Abbildung 3.18: Exemplarische vertikale Schnittlinie durch die vorgegebene Phasenverteilung aus 3.17(c) (rot, Kreis) und die rekonstruierte Verteilung (grün, Quadrat): (a) gemischte Randbedingung und (b) unbegrenzter freier Raum. Der Schnitt erfolgte jeweils in der Mitte der Bilder ( $N_x = 256$ ). Die Differenz (blau, Dreieck) zeigt den Unterschied zwischen Sollverteilung und Rekonstruktion.

gemischten Randbedingungen wurde dabei durch Kombination der Gleichungen (2.11), (2.14) und (2.17) erzielt [42]. Wie bereits vorhergesagt, zeigt die Rekonstruktion unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes [siehe Abbildung 3.17(b)] deutliche numerische Artefakte. Diese treten vor allem an den Bildrändern auf, da das Objekt die nach Gleichung (2.22) geforderte Periodizität verletzt. Im Gegenteil dazu zeigt die Rekonstruktion mit gemischten Randbedingungen [siehe Abbildung 3.17(a)] kaum Abweichungen zur in Abbildung 3.17(c) gezeigten Sollverteilung der Phase. Wie auch bei den anderen Testobjekten soll eine Schnittlinie durch die Mitte der Bilder 3.17(a) und 3.17(b) ( $N_x = 512$ ) einen Vergleich zwischen Sollverteilung (rot, Kreis) und rekonstruierten Phasen (grün, Quadrat) liefern. Wie in Abbildung 3.18 zu sehen, zeigen die beiden Methoden bezüglich der Schnittlinie kaum einen Unterschied in der Güte der Rekonstruktion. Der Grund dafür ist, dass die Schnitte durch die Mitte der Bilder erfolgten und die numerischen Artefakte vor allem am Rand sichtbar sind. Eine Beurteilung der Rekonstruktionen über das ganze Feld erfolgt in Abschnitt 3.2.4.

### 3.2.3 Absorbierendes Objekt

Die nicht perfekt positionierte Glasfaser aus vorherigem Abschnitt kommt einem in der Realität zu vermessenden Objekt schon wesentlich näher als die ideal vertikal ausgerichtete Faser. Allerdings wurde auch hierbei ein entscheidender Faktor im Rahmen der Simulationen vernachlässigt: Fast jedes reale Objekt weist eine gewisse Absorption bzw. Amplitudenmodulation auf. Dies hat zur Folge, dass die in Abschnitt 2.4.2 angeführten Bedingungen der konstanten Intensitätsverteilung des Fokusbildes  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  des Objektes nicht eingehalten werden kann. Wie eingangs des Abschnitts 3.2 bereits angedeutet, soll die Auswirkung einer ortsabhängigen Absorption auf das Messprinzip nun genauer untersucht werden. Um den Einfluss der Amplitudenmodulation auf das Verfahren zu überprüfen, wurde ein Testobjekt simuliert, welches in Abbildung 3.19 dargestellt ist. Die Intensitätsverteilung des Objektes weist eine harmonische Amplitudenmodulation

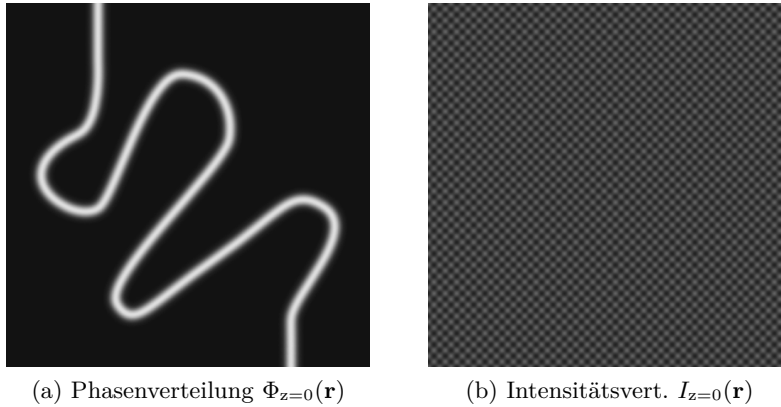


Abbildung 3.19: Phasen- und Intensitätsverteilung eines absorbierenden Objektes: Abbildung (a) zeigt die Phasenverteilung mit Phasenwerten von  $[0; \pi]$  rad. In (b) ist die harmonisch modulierte Intensitätsverteilung, mit einer Absorption von bis zu 64%, zu sehen.

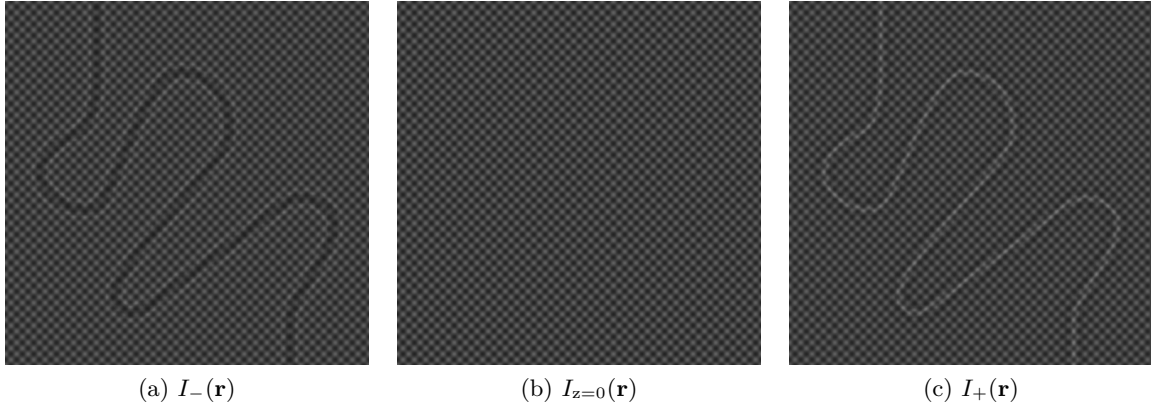


Abbildung 3.20: Drei simulierte Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen bei einem absorbierenden Objekt: Abbildung (a) zeigt die Aufnahme aus der Ebene  $z = -3\mu m$ , (b) das Fokusbild aus der Ebene  $z = 0$  und (c) das Bild aus der Ebene  $z = +3\mu m$ .

in  $x$ - und  $y$ -Richtung auf, während die Phasenverteilung schlangenförmig, mit Phasenwerten von  $[0; \pi]$  *rad*, gewählt wurde. Aufgrund ihrer Form verletzt die Phasenverteilung explizit periodische Randbedingungen. Die Intensitätsverteilung mit einer Periode der Modulation von 16 Pixel erfüllt ebenfalls deutlich nicht die Bedingung der konstanten Intensität nach Gleichung (2.24). Die ortsabhängige Absorption des Objektes wurde dabei so eingestellt, dass die maximale Helligkeit in Abbildung 3.19(b) einer Transmission von 100% und die minimale einer Transmission von 36% entspricht. Die lokale Absorption des Objektes beträgt demnach bis zu 64%, was einen Kontrast  $K = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}) = 47\%$  ergibt. Die durch die Propagation mit der CVM erhaltenen Intensitätsbilder sind in Abbildung 3.20 zu finden. Parameter der Berechnung waren in diesem Fall eine Wellenlänge  $\lambda = 550nm$ , Pixelgröße  $\Delta x = 6,45\mu m$ , Defokusbildanzahl  $\Delta z/2 = \pm 3\mu m$ , Vergrößerung des optischen Systems  $V = 20\times$  und Pixelanzahl  $N_x, N_y = 512$ . Bei der Rekonstruktion der Phasenverteilung wurde wiederum der aus der Fachliteratur bekannte Algorithmus unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes [siehe Gleichung (2.22)] [43–46] mit dem hier entwickelten Ansatz expliziter Randbedingungen verglichen. Die Form des Objektes legte dabei die Verwendung von Neumann-Randbedingungen nahe [41]. Aufgrund der absorbierenden Eigenschaften und der daraus resultierenden Verletzung der Herleitung wurden auch gemischte Randbedingungen bei der Rekonstruktion berücksichtigt. Somit konnte ein möglichst optimal an die Fragestellung angepasstes Lösungsverfahren durch Zusammenspiel der Gleichungen (2.13), (2.12) und (2.17) realisiert werden. In Abbildung 3.21 sind die Ergebnisse und die Sollverteilung der Phase zusammengefasst. Auch bei diesem absorbierenden Objekt können Schnittlinien durch die rekonstruierten Phasenverteilungen aus den Abbildungen 3.21(a), 3.21(b) und 3.21(c) die Tauglichkeit der drei verschiedenen Lösungsagorithmen veranschaulichen. Einen Schnitt entlang des Bildrandes von links oben nach rechts oben ist in Abbildung 3.22(a) dargestellt, während in Abbildung 3.22(c) die Linie diagonal von links oben nach rechts unten gezogen wurde. Abbildung 3.22(a) und vor allem der vergrößerte Ausschnitt 3.22(b) zeigt,

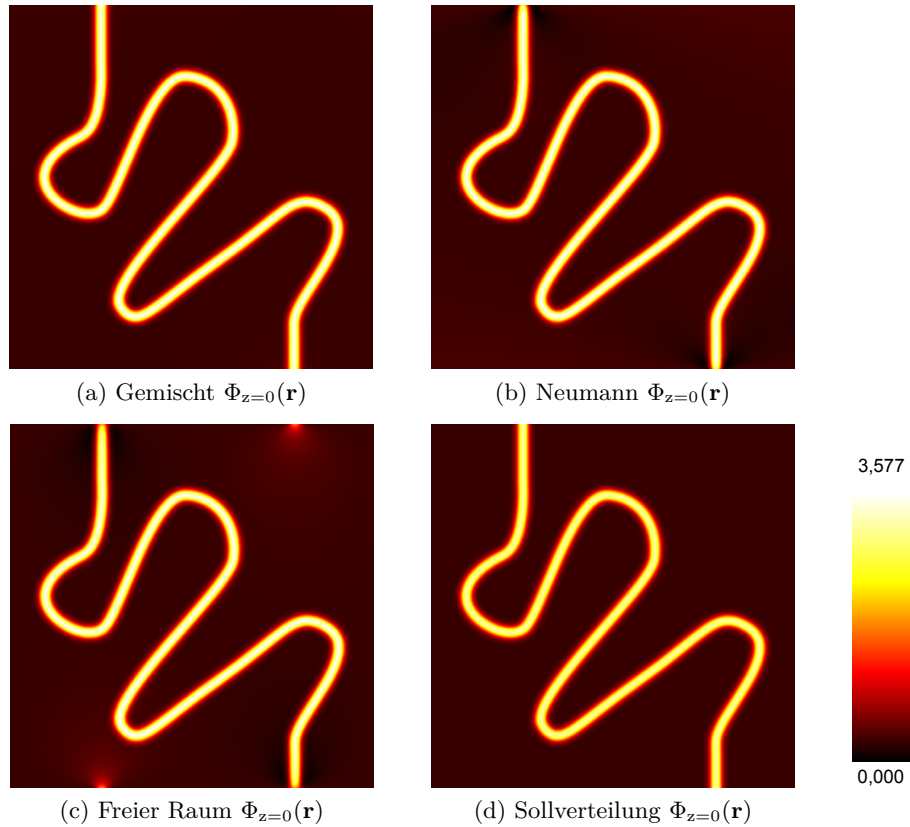
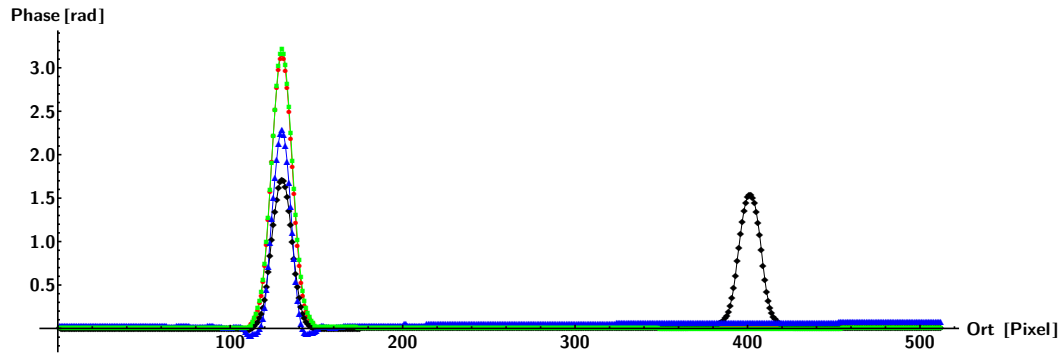


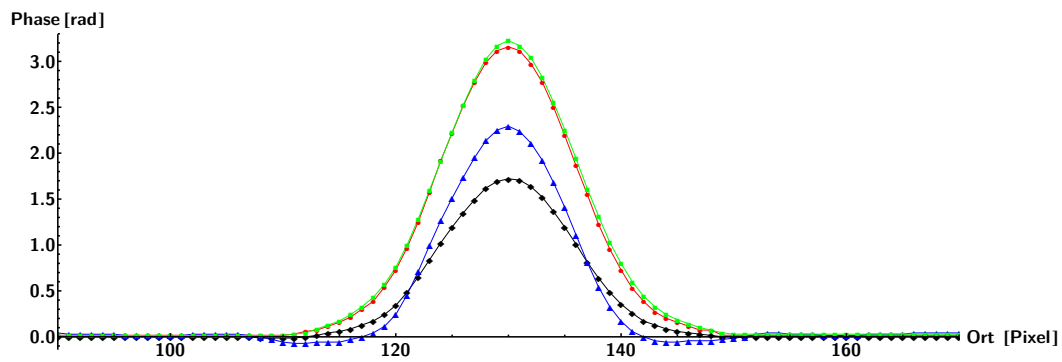
Abbildung 3.21: Ergebnisse der Phasenrekonstruktion bei einem absorbierenden Objekt: Abbildung (a) zeigt die Rekonstruktion im Falle von gemischten und (b) unter Neumann-Randbedingungen. Die Verteilung unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes ist in (c) zu sehen. Zum Vergleich ist in (d) die Sollverteilung aus Abbildung 3.19(a) in Falschfarben dargestellt. Die Farbskala rechts zeigt die Zuordnung der rekonstruierten Phasenwerte  $[0; 3,913]$  *rad*.

dass die Rekonstruktion mit gemischten Randbedingungen (grün, Quadrat) nahezu gleich der Sollverteilung (rot, Kreis) ist. Das Verfahren mit Neumann-Randbedingungen (blau, Dreieck) zeigt am Ansatz der Verteilung die stärkste Abweichung zur Sollverteilung und erreicht auch nicht die erforderliche Höhe, während das weit verbreitete Verfahren unter Annahmen des unbegrenzten freien Raumes (schwarz, Raute) massive numerische Artefakte aufzeigt: Vor allem die zweite Erhebung mit einer Höhe von ca.  $1,5 \text{ rad}$ , die nicht in der Sollverteilung vorhanden ist, offenbart die deutlichen Schwächen dieses Lösungsverfahrens. Im Fall des diagonalen Schnitts [siehe Abbildung 3.22(c)], weg von den Bildrändern, zeigen alle drei Verfahren weitgehend korrekte Rekonstruktionsergebnisse. Dies ist erstaunlich, da auch hier die Absorption des Objektes örtlich stark variiert und demnach die Gültigkeit des Rekonstruktionsverfahrens nach Gleichung (2.24) eindeutig verletzt wird. Dieses Ergebnis legt den Rückschluss nahe, dass das Verfahren auch im Fall eines absorbierenden Objektes (hier 64%), und damit im Widerspruch zu Gleichung

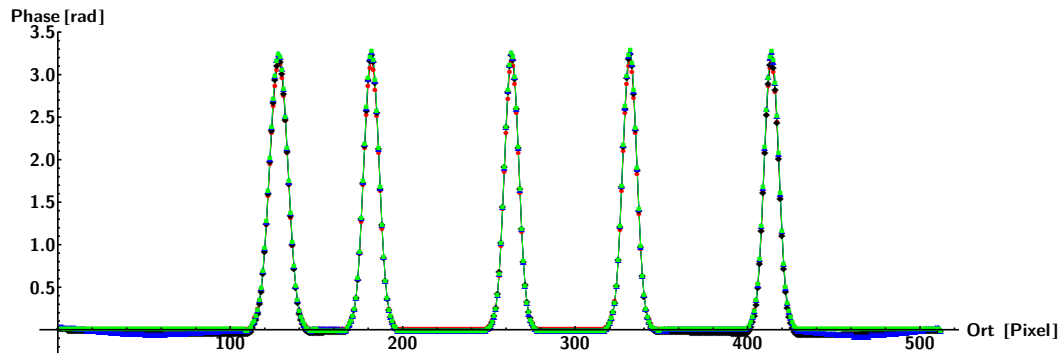
(2.24), gute Resultate liefern kann.



(a) Schnitt waagrecht  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$



(b) Vergrößerung Schnitt waagrecht  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$



(c) Schnitt diagonal  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$

Abbildung 3.22: Exemplarische Schnittlinien durch die vorgegebene Phasenverteilung aus 3.21(d) (rot, Kreis) zusammen mit den rekonstruierten Verteilungen unter gemischten (grün, Quadrat), Neumann- (blau, Dreieck) und unbegrenzter freier Raum Randbedingungen (schwarz, Raute): (a) zeigt eine Schnitt entlang des Bildrandes von links oben nach recht oben und (b) einen vergrößerten Ausschnitt aus (a). In (c) verläuft die Linie diagonal von recht oben nach links unten.



### 3.2.4 Beurteilung der Ergebnisse und Fehlerabschätzung

In diesem Abschnitt soll eine genauere quantitative Bewertung der in den vorherigen Abschnitten rekonstruierten Phasenstörungen erfolgen.

#### Bewertungsmethoden

Die Messgrößen, welche zur Bewertung herangezogen werden, sind die relative Abweichung des Phasenhubes der rekonstruierten Phasenverteilung vom Soll-Phasenhub sowie der relative und absolute *root-mean-square* (RMS)-Fehler. Mit der relativen Abweichung vom Soll-Phasenhub kann lediglich der Unterschied im Hub zwischen Rekonstruktion und vorgegebener Funktion bestimmt werden. Dies betrifft demnach nur den Wert, der durch die Differenz zwischen Maximal- und Minimalwert der Verteilung in Bezug auf den Hub der vorgegebenen Verteilung gegeben ist. Es ist damit keine Aussage über die Qualität der Rekonstruktion über das gesamte Feld zu treffen. Deshalb wird als Bewertungsgröße über die gesamte Verteilung der relative und absolute RMS-Fehler herangezogen [41, 136–138]. Die Gleichungen (3.16), (3.17) und (3.18) zeigen, wie die drei Bewertungsgrößen zu berechnen sind.

$$\text{rel. Abweichung vom Soll-Phasenhub} = 100\% \times \left( \frac{\max_{\text{rek}} - \min_{\text{rek}}}{\max_{\text{soll}} - \min_{\text{soll}}} - 1 \right) \quad (3.16)$$

wobei, wie bereits beschrieben, die Differenz  $\max - \min$  den Phasenhub der jeweiligen Verteilung darstellt.

$$\text{rel. RMS-Fehler} = 100\% \times \sqrt{\frac{\sum_{j,l} \{\Phi_{\text{rek}}(j,l) - \Phi_{\text{soll}}(j,l)\}^2}{\sum_{j,l} \{\Phi_{\text{soll}}(j,l)\}^2}} \quad (3.17)$$

$$\text{abs. RMS-Fehler} = \sqrt{\frac{\sum_{j,l} \{\Phi_{\text{rek}}(j,l) - \Phi_{\text{soll}}(j,l)\}^2}{j \times l}} \quad (3.18)$$

mit  $j \times l$  der Gesamtanzahl der Pixel. Es ist zu beachten, dass vor der Berechnung des relativen und absoluten RMS-Fehlers die Mittelwerte der Verteilungen  $\Phi_{\text{rek}}$  und  $\Phi_{\text{soll}}$  auf Null gesetzt wurden, da die vorgestellten Verfahren die Phasenverteilungen nur in Abhängigkeit einer konstanten Offset-Phase berechnen können [41, 48, 49, 136].

#### Bewertungsergebnisse

Tabelle 3.1 zeigt eine Übersicht der relativen Abweichungen und der RMS-Fehler der verschiedenen simulierten Testobjekte in Bezug auf die unterschiedlichen Lösungsverfahren.

**Sphärische Phasenstörung** Wie aus der Tabelle ersichtlich, bestätigen sich die qualitativen Ergebnisse für die sphärische Störung aus Abschnitt 3.2.1: Die drei Lösungsverfahren liefern vergleichbare Resultate. Bei allen Algorithmen liegt die relative Abweichung vom Soll-Phasenhub im Bereich von einem Prozent, während der relative RMS-Fehler sich im Promille-Bereich bewegt.

Objekt	Algorithmus	rel. Abw. [%]	rel. RMS [%]	abs. RMS
sphärische Phasenstörung	Dirichlet	1,146	0,841	$0,005 \times 10^{-3}$
	Neumann	1,122	0,858	$0,005 \times 10^{-3}$
	Unbegrenzt	1,006	0,817	$0,005 \times 10^{-3}$
absorbierendes Objekt	Neumann	13,864	5,923	$0,086 \times 10^{-3}$
	Gemischt	5,434	3,684	$0,053 \times 10^{-3}$
	Unbegrenzt	13,576	9,766	$0,142 \times 10^{-3}$
Glasfaser (vertikal)	Neumann	-9,186	13,534	$1,580 \times 10^{-3}$
	Unbegrenzt	-11,418	13,535	$1,581 \times 10^{-3}$
Glasfaser (verkippt)	Gemischt	2,093	9,443	$1,108 \times 10^{-3}$
	Unbegrenzt	-0,942	22,529	$2,643 \times 10^{-3}$

Tabelle 3.1: Übersicht über die relativen Abweichungen (rel. Abw.) und RMS-Fehler der rekonstruierten Phasenverteilungen zur Sollverteilung für die verschiedenen Testobjekte und Algorithmen. Die Werte wurden jeweils auf die dritte Nachkommastelle gerundet.

**Absorbierendes Objekt** Im Fall des absorbierenden Objektes sind die Abweichungen und Fehler wesentlich höher. Die relative Abweichung vom Soll-Phasenhub liegt bei zwei der drei Methoden im zweistelligen Bereich. Es zeigt sich aber deutlich, dass der Algorithmus mit gemischten Randbedingungen, welcher an die Eigenschaften des Objektes angepasst wurde, sowohl in Bezug auf die relative Abweichung als auch die RMS-Fehler mit Abstand das beste Rekonstruktionsergebnis liefert. Trotz einer ortsabhängigen Intensitätsverteilung mit einer Absorption von bis zu 64% liegt der relative RMS-Fehler nur bei ca. 3,7%. Der RMS-Fehler des Lösungsverfahrens unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes (ca. 9,8%) spiegelt hingegen die Schwierigkeiten dieser Methode im Fall nichtperiodischer Objekte wider. Durch den Einsatz gemischter Randbedingungen konnte die Rekonstruktionsqualität im Vergleich zu [41] trotz deutlich erhöhter Absorption verbessert werden.

**Glasfaser vertikal** Die quantitative Beurteilung der rekonstruierten vertikal orientierten Glasfaser zeigt, dass das Verfahren mit Neumann-Randbedingungen und die Methode unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes für dieses Objekt vergleichbare Abweichungen liefert. Die relative Abweichung und der relative RMS-Fehler, meist im zweistelligen Prozent-Bereich, lassen sich gut anhand der Schnittbilder aus Abbildung 3.14 erklären: Bereits hier ist eine Diskrepanz zwischen dem maximalen Hub der Sollverteilung zur Rekonstruktion ersichtlich. Unter Berücksichtigung der Unterschiede an den Übergängen zwischen den einzelnen Materialien der Glasfaser (Immersion-Mantel und Mantel-Kern) sind auch die Werte für den RMS-Fehler nachvollziehbar, da dieser die Abweichungen über das gesamte Feld berechnet.

**Glasfaser verkippt** Einen anderen Effekt hingegen zeigt die um  $10^\circ$  verkippte Glasfaser. Die relativen Abweichungen zum Soll-Phasenhub sind im Vergleich zur vertikalen Faser sehr gering. Unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes ergibt sich sogar die geringste Abweichung in der gesamten Tabelle. Werden hingegen die RMS-Fehler betrachtet, so ist klar ersichtlich, dass die relative Abweichung zum Soll-Phasenhub nur sehr bedingt als Bewertungsgröße tauglich ist: Die RMS-Fehler sind hier mit Abstand am höchsten. Dieses Ergebnis lässt sich bereits angesichts von Abbildung 3.17 vermuten, da an den Bildrändern massive Abweichungen zur Sollverteilung auftreten und diese bei der Berechnung der RMS-Fehler berücksichtigt werden.

### Bestimmung von Brechzahlen

Da die Glasfaser im Rahmen der Arbeit auch als reales Messobjekt dienen wird, soll an dieser Stelle eine weitere, genauere Untersuchung erfolgen. Die folgenden Analysemethoden zur Bewertung der Rekonstruktion von Glasfasern bzw. deren Eigenschaften werden auch später für die Beurteilungen tatsächlicher Messungen herangezogen. Eine Stufenindex-Faser besteht aus unterschiedlichen Materialien, wobei die entscheidende optische Eigenschaft durch die Brechzahl des Materials gegeben ist. Bereits in der Simulation der Faser flossen diese wichtigen Kenngrößen, neben der Geometrie, in das Modell der Glasfaser ein (siehe Abschnitt 3.2.2). Demnach ist eine Aussage über die Güte der Rekonstruktion an die korrekte Wiedergabe der Kenngröße *Brechzahl* gekoppelt.

**Methode** Im Folgenden soll eine Analysemethode vorgestellt werden, welche die materialabhängige Brechzahl und die jeweiligen geometrischen Größen berücksichtigt. Die entwickelte Methode hat dabei den folgenden Ablauf: Das Rekonstruktionsergebnis, wie es zum Beispiel in den Abbildungen 3.17(a) zu sehen ist, wird in das Programm *mathematica*® von *Wolfram Research* eingeladen. Für jede Spalte der Rekonstruktion ergibt sich eine vertikale Schnittlinie der rekonstruierten Verteilung, wie sie in Abbildung 3.18(a) dargestellt ist. Mit Hilfe der geometrischen Parameter der Glasfaser, Durchmesser des Kerns und Mantel, der Vergrößerung des optischen Systems  $V$ , der Pixelgröße  $\Delta x$  des verwendeten Detektors, der Wellenlänge  $\lambda$ , Brechzahl der Immersion  $n_{\text{Immersion}}$  und gegebenenfalls der Winkel der Verkipfung zur Achse, kann ein Fit-Algorithmus unter Kenntnis dieser Eingangsgrößen auf Basis von Gleichung (3.15) erstellt werden. Zu jeder vertikalen Schnittlinie wird entsprechend der obigen Größen eine optimale Fit-Funktion gesucht, welche in Form zweier Fit-Parameter lediglich die Brechzahl des Kerns  $n_{\text{Kern}}$  und die des Mantels  $n_{\text{Mantel}}$  enthält. Die Parameter der Fit-Funktion werden so lange variiert, bis ein Optimum erreicht ist. Das Optimum stellt hierbei eine Minimierung des quadratischen Abstandes zwischen Fit-Funktion und Schnittlinie der Rekonstruktion dar (*least-square fit*). Somit ergibt sich für jeden einzelnen vertikalen Schnitt durch die rekonstruierte Phasenverteilung eine Brechzahl  $n_{\text{Kern,rek}}$  für den Kern und eine Brechzahl  $n_{\text{Mantel,rek}}$  für den Mantel der Faser. Für die rekonstruierte Phasenverteilung aus Abbildung 3.17(a), welche in  $x$ -Richtung  $N_x$  Pixel besitzt, ergeben sich demnach  $N_x$  einzelne Brechzahlen für Kern und Mantel. Abschließend kann der Mittelwert über die jeweilige Brechzahl und die dazugehörige Standardabweichung über alle  $N_x$  Brechzahl-Werte als Bewertungsgröße hinzugezogen werden, um auf die Homogenität der Rekonstruktion zu schließen. Wie vorher soll auch hier die relative Abweichung zum Sollwert,

in diesem Fall zur Soll-Brechzahl, als Kriterium für die Güte der Rekonstruktion dienen:

$$\text{rel. Abweichung von der Soll-Brechzahl} = 100\% \times \left( \frac{\bar{n}_{i,\text{rek}}}{n_{i,\text{soll}}} - 1 \right) \quad (3.19)$$

wobei  $\bar{n}_{i,\text{rek}}$  für den Mittelwert der Brechzahl des jeweiligen Mediums (Kern, Mantel) und  $n_{i,\text{soll}}$  für den Sollwert der Brechzahl des jeweiligen Mediums (Kern, Mantel) aus der Simulation steht.

**Ergebnisse** Tabelle 3.2 zeigt die Zusammenstellung der berechneten Werte für die um  $10^\circ$  verkippte Glasfaser aus Abschnitt 3.2.2, wobei der Sollwert für die Brechzahl des Kerns und des Mantels den Simulationsparametern entspricht. Der Sollwert der Apertur ( $A$ ) in der Tabelle berechnet sich nach Gleichung (3.11). Der Mittelwert der Apertur über die gesamte rekonstruierte Verteilung wurde errechnet, indem für jede Schnittlinie die Apertur aus den Brechzahlen  $n_{\text{Kern,rek}}$  und  $n_{\text{Mantel,rek}}$  nach Formel (3.11) ermittelt wurde. Anschließend wurde über alle Werte der Mittelwert gebildet und abschließend die dazugehörige Standardabweichung errechnet. Die in Tabelle 3.2 aufgeführten Werte zeigen, dass die zur Rekonstruktion der um  $10^\circ$  verkippten Faser verwendeten Algorithmen (gemischte Randbedingung und unbegrenzter freier Raum) deutliche Unterschiede aufweisen. Die Abweichungen der Brechzahlen vom Sollwert liegen zwar für beide im Promille-Bereich, doch ist der Fehler unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes wesentlich größer als beim Einsatz gemischter Randbedingungen. Für die relative Abweichung des Kerns ergibt sich ein Faktor zwischen den beiden Techniken von ca. 1,87, im Fall des Mantels von sogar ca. 12,07. Die Werte für die Standardabweichungen der Brechzahlen zeigen außerdem, dass die Rekonstruktion des unbegrenzten freien Raumes eine wesentlich stärkere Variation über das Feld aufweist als das alternative Verfahren mit gemischten Randbedingungen. Dies bestätigt die bereits in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Ergebnisse für dieses Objekt. Dass die relativen Abweichungen der Apertur  $A$  im Gegensatz zu den Abweichungen der Brechzahlen für die verschiedenen Algorithmen im Prozent-Bereich liegen, ist dadurch zu erklären, dass nach Gleichung (3.11) die Brechzahlen quadratisch in die Berechnung der Apertur eingehen. Somit wirkt sich

	Sollwert	Algorithmus	Mittelwert	rel. Abw. [%]	Standardabw.
$n_{\text{Kern}}$	1,45700	Gemischt	1,45637	−0,04311	0,00003
		Unbegrenzt	1,45582	−0,08066	0,00083
$n_{\text{Mantel}}$	1,44100	Gemischt	1,44106	0,00384	0,00007
		Unbegrenzt	1,44167	0,04637	0,00107
$A$	0,21533	Gemischt	0,21066	−2,16869	0,00046
		Unbegrenzt	0,20199	−6,19471	0,01474

Tabelle 3.2: Vergleich zwischen den Sollwerten und den rekonstruierten Werten für die Brechzahl des Kerns ( $n_{\text{Kern}}$ ) und Mantels ( $n_{\text{Mantel}}$ ) sowie der Apertur ( $A$ ) der um  $10^\circ$  verkippten Glasfaser unter Berücksichtigung verschiedener Algorithmen. Die Werte wurden jeweils auf die fünfte Nachkommastelle gerundet.

der Fehler der Brechzahlen entsprechend stärker auf die Apertur der Faser aus.

Es kann abschließend gesagt werden, dass das Prinzip der gemischten Randbedingungen für die Rekonstruktion eines solchen Objektes gut geeignet ist. Dies zeigt sich zum einen an den Ergebnissen für die errechneten Brechzahlen, welche lediglich Abweichungen im zehntel Promille-Bereich aufweisen, zum anderen an der geringen Standardabweichung über das Messfeld, trotz eines Winkels von  $10^\circ$ . Es gilt hierbei zu bedenken, dass in der betrachteten Abweichung sowohl der Fehler der Propagation mit der CVM als auch der Fehler der Rekonstruktion und der Fehler des Fit-Algorithmus enthalten sind. Demnach sind in dieser Bewertung verschiedene numerische Artefakte inbegriffen, die zum Beispiel durch Rundungsfehler bei der Datenkonvertierung und dem Speichern der Daten verursacht werden, sowie allgemeine Ungenauigkeiten der Berechnungsalgorithmen. Der Fehler, der durch die Propagationsmethode CVM in die Betrachtung mit einfließt, ist bei einer realen Messung nicht vorhanden. Jedoch ist bei einer solchen Messung mit anderen Einschränkungen wie zum Beispiel dem Rauschen des Detektors zu rechnen.



## 4 Experimentelle Realisierung

In diesem Kapitel werden die experimentellen Aufbauten erläutert, mit denen die deterministische Phasenrekonstruktion realisiert wurde. Im Rahmen der Arbeit wurden zwei verschiedene optische Systeme aufgebaut, um die notwendigen Eingangsdaten für den Rekonstruktionsalgorithmus zu gewinnen. Bei den Eingangsdaten handelt es sich, wie in den vorherigen Kapiteln erläutert, um Intensitätsaufnahmen des Objektes aus unterschiedlichen Ebenen. Die beiden Systeme unterscheiden sich dahingehend, dass die Aufnahme der Intensitätsverteilungen bei einem System sequentiell [53] und bei dem anderen parallel [42, 51, 52] erfolgt.

### 4.1 Komponenten

In den folgenden Abschnitten werden die für die Aufbauten relevanten Komponenten erläutert und ihre Verwendung beschrieben.

#### 4.1.1 Mikroskop

Als optisches System zur Aufnahme der Intensitätsverteilungen dient ein Mikroskop. Gründe für die Wahl eines Mikroskopes zur Abbildung des Objektes aus unterschiedlichen Fokusbereichen sind die hohe beugungsbegrenzte Abbildungsqualität, die hohe Vergrößerung, die parallele homogene Beleuchtung und die große Auswahl an verschiedenen Lichtquellen, die einfach an das Mikroskop angebaut werden können. Außerdem besteht die Möglichkeit, je nach Mikroskop, Proben sowohl im Durchlicht (transparente Objekte) als auch im Auflicht (reflektive Objekte) zu untersuchen. Das Mikroskop ist damit aufgrund seiner Eigenschaften dazu prädestiniert, als Aufnahmesystem zu dienen. Im Rahmen der Arbeit kamen verschiedene Mikroskoptypen zum Einsatz. Zum einen ein *Leitz Orthoplan* und *Leica DMR* zur Untersuchung transparenter Proben im Durchlicht und zum anderen ein *Leica DMRM* zur Vermessung reflektiver Proben im Auflicht. Hierbei kamen Objektive mit 16- bis 100-facher Vergrößerung ( $V_{\text{Obj}}$ ) und numerischen Aperturen ( $NA$ ) von 0,45 bis 1,32 zum Einsatz. Im Folgenden sollen kurz die wichtigsten Parameter besprochen werden, welche ein Mikroskop als optisches System charakterisieren.

#### Vergrößerung

Die Gesamtvergrößerung  $V_{\text{ges}}$  eines Mikroskopes ergibt sich aus dem Produkt der Vergrößerung des Objektives  $V_{\text{Obj}}$ , der Vergrößerung der Tubuslinse  $V_{\text{TL}}$  und der Vergrößerung des Okulars  $V_{\text{Ok}}$ .

$$V_{\text{ges}} = V_{\text{Obj}} \times V_{\text{TL}} \times V_{\text{Ok}} \quad (4.1)$$

Wird das Mikroskop ohne Okular betrieben, wie es bei der Verwendung einer Kamera der Fall ist, so berechnet sich die Gesamtvergrößerung nur aus dem Produkt der Vergrößerungen von Objektiv und Tubuslinse.

### Numerische Apertur

Die numerische Apertur  $NA$  eines Mikroskopes ist definiert als das Produkt aus der Brechzahl des umgebenden Mediums ( $n_i$ ) und der Apertur ( $A = \sin \alpha$ ) des Systems.

$$NA = n_i \sin \alpha \quad (4.2)$$

wobei  $\alpha$  dem halben Öffnungswinkel des optischen Systems entspricht. Ein umgebendes Medium mit einer Brechzahl ungleich der von Luft ( $n_{\text{Luft}} \approx 1$ ) wird in der Mikroskopie als Immersion bezeichnet. Zum Immulgieren von Präparaten werden meist Öle verwendet. Wasser ist prinzipiell auch geeignet, hinterlässt aber beim Trocknen Spuren auf den Frontlinsen des Objektivs und den Proben.

### Laterale Auflösung

Die laterale Auflösung eines Mikroskopes bei inkohärenter Beleuchtung und kreisförmiger Apertur ergibt sich nach [50] zu

$$\rho = 0,61 \frac{\lambda}{NA} \quad (4.3)$$

Der Wert  $\rho$  gibt dabei an, wie groß die Distanz zwischen zwei Punkten ist, die gerade noch getrennt aufgelöst werden können.

### Schärfentiefe

Die Schärfentiefe ist die Strecke im Objektraum, bei der alle Objekte, welche innerhalb dieses Bereiches liegen, noch scharf auf den Sensor abgebildet werden. Die wellenoptische- oder auch Rayleigh-Schärfentiefe im Falle beugungsbegrenzter Abbildung ergibt sich nach [139] zu

$$\delta z_R = \pm \frac{n_i \lambda}{2 (NA)^2} \quad (4.4)$$

Wird ein Objekt innerhalb des Schärfetiefenbereiches verschoben, so erscheint es weiterhin vollständig scharf auf dem Sensor. Die Schärfentiefe ist, wie bereits in Abschnitt 2.4.3 angesprochen, ein entscheidender Parameter des vorgestellten Messverfahrens.

### Beleuchtung

Die Beleuchtung bildet die Grundlage jedes lichtmikroskopischen Verfahrens. Ganz allgemein lassen sich die Beleuchtungsstrahlengänge, je nach Anwendung, in Auf- und Durchlicht unterteilen. Darüber hinaus können diese Verfahren wiederum in Hell- bzw. Dunkelfeldbeleuchtung gegliedert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde zum Aufzeichnen der Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Fokuslagen lediglich die Hellfeldbeleuchtung im Auf- und Durchlicht



verwendet. Deshalb soll im Folgenden auch nur dieses Beleuchtungsverfahren näher erläutert werden. Die Beleuchtung im Mikroskop erfolgt auf Basis eines verflochtenen Strahlengangs, der sogenannten Köhlerschen Beleuchtung [111]. Der genaue Strahlengang ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Diese spezielle Beleuchtungstechnik sorgt dafür, dass das Objekt, trotz inhomogener

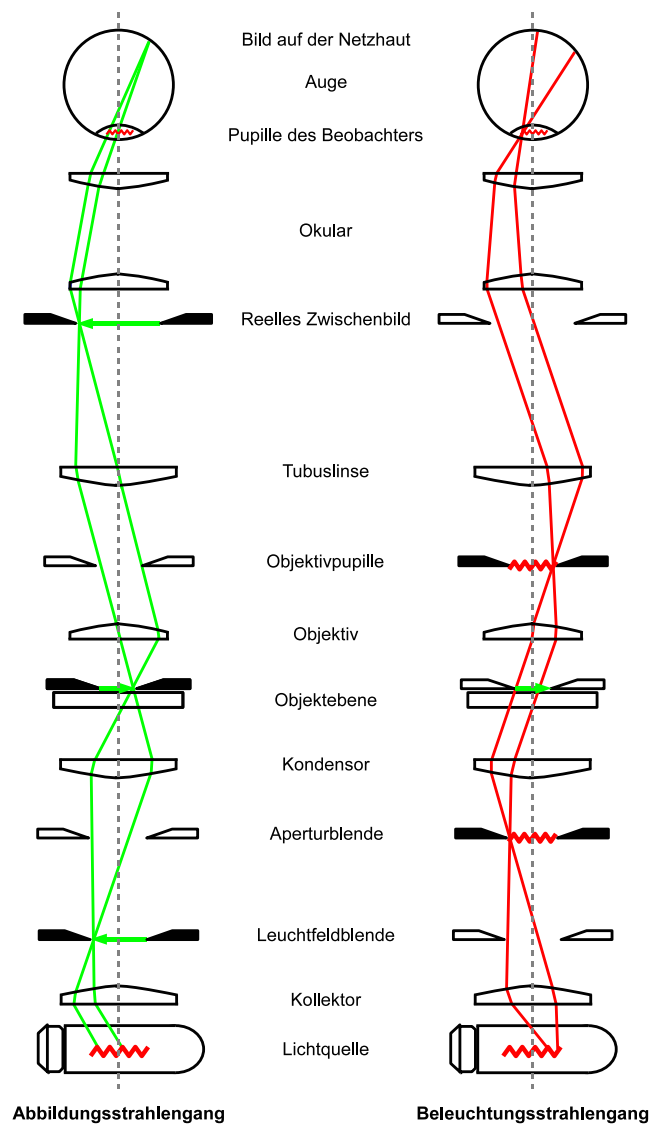


Abbildung 4.1: Schematischer Strahlengang der Köhlerschen Beleuchtung im Durchlicht: Durch den Strahlengang nach Köhler ergibt sich eine homogene Ausleuchtung des Objektes. Konjugierte Ebenen innerhalb des Mikroskopes ermöglichen außerdem, die Beleuchtung und Abbildung zu manipulieren, ohne dabei in die tatsächlichen Ebenen eingreifen zu müssen.

Leuchtdichtevertelung der Lichtquelle, homogen und von ebenen Wellen ausgeleuchtet wird. Gleichzeitig ergeben sich durch den verflochtenen Strahlengang nach Köhler innerhalb des Mikroskopes verschiedene, zueinander konjugierte Ebenen. Zum Beispiel ermöglicht die Leuchtfeldblende, Einfluss auf die Größe der ausgeleuchteten Fläche in der Objektebene zu nehmen, ohne in die Ebene selbst einzugreifen. Ebenfalls kann durch Einstellen der Aperturblende die Größe der zur Bildentstehung beitragende Lichtquelle variiert werden. Damit ergibt sich einerseits die Möglichkeit, die Helligkeit in der Objektebene zu ändern, andererseits wird aber auch der räumliche Kohärenzgrad der Lichtquelle verändert. Dies ist möglich, da der Kollektor die Lichtquelle in die Aperturblende abbildet (siehe Abbildung 4.1). Wird die Größe der Aperturblende verändert, so verändert sich entsprechend die Größe der zur Bildentstehung beitragenden Lichtquelle. Bei zugezogener Aperturblende trägt demnach nur Licht aus einem kleinen Teil des Leuchtmittels zur Beleuchtung bei. Somit ist bei zugezogener Aperturblende der räumliche Kohärenzgrad der Quelle größer als bei offener Blende. Der räumliche Kohärenzgrad wiederum hat direkten Einfluss auf die Übertragungseigenschaften des Mikroskopes. Die Grenzfrequenz der OTF im Fall vollständig inkohärenter Beleuchtung ist um Faktor zwei größer als die Grenzfrequenz im kohärenten Fall [1, 16, 123] und wirkt sich damit auf die Auflösung des Mikroskopes aus.

### 4.1.2 Lichtquellen

Neben dem Strahlengang der Beleuchtung ist selbstverständlich auch die Art der verwendeten Lichtquelle ein wichtiger Parameter. Entscheidende Größen sind dabei die spektrale Bandbreite und die geometrischen Ausdehnung der Quelle, da diese direkt mit der zeitlichen und räumlichen Kohärenz der Lichtquelle zusammenhängen [1]. Im Rahmen der Arbeit kamen diverse Lichtquellen zum Einsatz. Neben einer Standardmikroskopbeleuchtung mit Halogenlampe wurde auch eine Natrium-Gasentladungslampe ( $\lambda = 589nm$ ) und ein HeNe-Laser ( $\lambda = 632,8nm$ ) [140] verwendet. Die benutzten Lichtquellen weisen alle unterschiedliche Grade der Kohärenz auf, wobei das breitbandige Spektrum der Halogenlampe zum Teil mit Interferenzfiltern gefiltert wurde, um so den zeitlichen Kohärenzgrad zu verändern [42]. Bei einer kohärenten Beleuchtung kann es jedoch zur Bildung von sogenannten Speckle kommen [141]: Trifft Licht aus einer kohärenten Quelle auf ein optisch raues Material und wird an diesem gestreut, so kommt es zur Interferenz der von den Streuzentren ausgehenden Wellen. Da die Zentren statistisch verteilt aber zeitlich konstant sind, ist auch das resultierende Interferenzmuster stationär [1]. Dieses Muster wird als Speckle bezeichnet. Um Speckle bei einer kohärenten Beleuchtung zu vermindern, wurde eine sogenannte Martienssen-Spiller-Quelle (*MSQ*) eingesetzt. Eine *MSQ* stellt eine quasi-monochromatische, quasi-thermische Lichtquelle dar, die erstmals 1964 von Werner Martienssen und Eberhard Spiller vorgestellt wurde [142–144]. Sie erlaubt es dank ihres Aufbaus den räumlichen Kohärenzgrad der Quelle in Grenzen frei einzustellen und somit die Bildung von Speckle trotz monochromatischer Beleuchtung zu unterdrücken. Eine genaue Beschreibung und Charakterisierung dieser Quelle ist unter anderem in [105, 145–148] zu finden.

### 4.1.3 Kamera

Um die Intensitätsverteilungen aus den verschiedenen Schärfeebenen aufzuzeichnen, fiel die Wahl auf die schwarz-weiß CCD-Kamera *Pike F-145B* der Firma *Allied Vision Technologies*.

Gründe hierfür waren, dass die *Pike F-145B* über einen Chip mit ausreichend hoher Auflösung von  $1388 \times 1038$  Pixel bei einer Pixelgröße von  $6,45 \times 6,45 \mu m^2$  verfügt, sie lichtstark und rauscharm ist [149]. Angesichts der Auflösung kann aus dem Bildfeld ohne weiteres ein Ausschnitt von  $1024 \times 1024$  Pixel gewählt werden. Dies ermöglicht die Verwendung der schnellen Fourier-Transformation innerhalb des Algorithmus zur Phasenrekonstruktion, da sich die Anzahl der zu prozessierenden Datenpunkte als Zweierpotenz darstellen lässt. Die Kamera ist mit einem 14Bit Analog-Digital-Wandler ausgestattet. Dieser gewährleistet, dass die Intensitätsverteilungen mit einer hinreichend hohen Auflösung an Graustufen ( $2^{14} = 16384$ ) aufgezeichnet werden.

## 4.2 Aufbauten

Wie bereits eingangs erwähnt, wurden zwei Typen von Aufbauten realisiert, um die Intensitätsverteilungen des Objektes aus unterschiedlichen Ebenen aufzuzeichnen. Diese sollen nun vorgestellt werden.

### 4.2.1 Sequentielles System

Bei dem sequentiellen System handelt es sich um die einfacher umzusetzende Variante. In diesem Aufbau kam das bereits vorgestellte *Leitz Orthoplan* Mikroskop zum Einsatz. Als Lichtquellen dienten sowohl die oben beschriebene Natrium-Gasentladungslampe als auch der bereits vorgestellte HeNe-Laser, wobei zur Verminderung von Speckle die *MSQ* verwendet wurde. Zur Aufnahme der Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Fokuslagen wurde das *Leitz Orthoplan* leicht modifiziert. Durch geeignete Mechaniken, welche mit einem CAD Programm selbst konstruiert und in der Fakultätswerkstatt gefertigt wurden, konnte der Objektisch des Mikroskopes um einen motorisierten computergesteuerten Lineartisch erweitert werden. Der Lineartisch (*MVP-25XA* von Newport) ermöglichte eine präzise, über eine Software gesteuerte Defokussierung des Objektes mit einer Auflösung von  $0,1 \mu m$  [150]. Die Aufzeichnung der Bilder erfolgte mit der in Abschnitt 4.1.3 beschriebenen 14Bit CCD Kamera *Pike F-145B*. Die für die Phasenrekonstruktion notwendigen Intensitätsverteilungen wurden sequentiell nacheinander aufgezeichnet, indem der Objektisch mit Hilfe des Lineartisches um definierte Strecken entlang der optischen Achse verfahren wurde. In der jeweiligen defokussierten Position wurde dann die entsprechende Intensitätsverteilung aufgenommen. Der Nachteil liegt darin, dass das sequentielle System lediglich die Untersuchung von statischen Proben zulässt, da sich das Objekt während der Aufnahmen nicht verändern darf. Andererseits ist es aufgrund seines simplen Aufbaus, der Verwendung von nur einer Kamera und kostengünstigen Standardkomponenten sehr einfach umzusetzen [53].

### 4.2.2 Echtzeit-System

Als Alternative zum zeit-sequentiellen Aufbau wurde ein System entwickelt, bei welchem die Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen parallel aufgezeichnet werden. Die gleichzeitige Aufnahme der Intensitätsbilder beseitigt die Nachteile des im vorigen Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Systems. Es ergibt sich somit die Möglichkeit, auch lebende Proben oder dynamische Prozesse zu untersuchen. Ansätze zur parallelen Detektion von Intensitätsverteilungen aus

unterschiedlichen Ebenen wurden unter anderem in [151–153] publiziert. Die Verfahren stützen sich dabei auf die Verwendung von holographischen Elementen, die es ermöglichen, die Verteilungen gleichzeitig auf einem Detektor aufzuzeichnen. Dabei muss man beachten, dass der Detektor über eine sehr hohe Pixelanzahl verfügen sollte, damit die verschiedenen Intensitätsverteilungen auf diesem einen Detektor immer noch hinreichend gut abgetastet werden können. Weiterhin muss beachtet werden, dass sich die Defokusdistanz nicht frei einstellen lässt, da diese durch das Design der holographischen Elemente vorgegeben ist. Die Defokusdistanz ist aber unter anderem von den Objekteigenschaften abhängig (siehe Abschnitt 2.4.3) und somit sind diese Ansätze nur bedingt für eine große Klasse von Proben geeignet. Die gleiche Problematik stellt sich bei dem von Waller et al. veröffentlichten Verfahren ein [133]. Die Defokussierung basiert hier auf der gezielten Ausnutzung der chromatischen Aberration eines optischen Systems und ist damit von den eingesetzten Linsen und der verwendeten Lichtquelle abhängig. Im Falle monochromatischer Beleuchtung wäre dieser Ansatz überhaupt nicht umzusetzen. Dies wurde auch schon in [42] angemerkt.

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren realisiert die Aufnahme der Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen auf eine andere Art. Ziel war es dabei, wiederum ein möglichst einfaches und flexibles Konzept zu entwickeln: Anstatt nur eine Kamera zu verwenden und den Objektisch des Mikroskopes zu verfahren, setzt das Echtzeit-System auf die Verwendung von mehreren Kameras, die gleichzeitig unterschiedliche Ebenen des Objektes aufzeichnen. Ein vergleichbarer Ansatz wurde auch von Horn et al. veröffentlicht [154]. Durch verschiedene Experimente konnte gezeigt werden, dass der Einsatz von nur zwei Kameras ausreichend ist [42, 106, 107, 117]. In diesem Fall wird die fokussierte Intensitätsverteilung  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  des Objektes aus der Ebene  $z = 0$  durch den arithmetischen Mittelwert der beiden defokussierten Bilder  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  bestimmt:

$$I_{z=0}(\mathbf{r}) \approx \frac{I_+(\mathbf{r}) + I_-(\mathbf{r})}{2} \quad (4.5)$$

Dies wurde auch schon in Publikationen zur TIE angeführt und ausgenutzt [35, 119]. Eine schematische Skizze des Echtzeit-Systems ist in Abbildung 4.2(a) zu sehen. Durch den Einbau eines kubischen Strahlteilers in den Abbildungsstrahlengang erzeugt die Tubuslinse zwei Bilder des Objektes. Die beiden Kameras werden anschließend so positioniert, dass ihre CCD-Sensoren jeweils vor ( $I_+(\mathbf{r})$ ) bzw. hinter ( $I_-(\mathbf{r})$ ) der eigentlichen Schärfeebene liegen. Den tatsächlichen experimentellen Aufbau mit dem Zwei-Kamera-System zeigt Abbildung 4.2(b). Als zentrales Montageelement des Zwei-Kamera-Systems dient ein Skelettwürfel (*G061081000*) der Firma LINOS [155]. Darin befindet sich der Strahlteiler (*G335520000* von LINOS [156]) auf einem justierbaren Prismenträger (*G065089000* von LINOS [157]). Mechanische Adapter aus Aluminium ermöglichen den Anschluss der beiden *Pike F-145B* Kameras über Abstandsringe (*AZ005* von Phytec [158]) am Skelettwürfel. Die Defokusdistanz  $\Delta z'/2$  der beiden Intensitätsverteilungen lässt sich dabei schnell und einfach durch verschieden große Abstandsringe einstellen [42], wobei die Abstandsringe entsprechend dem zu untersuchenden Objekt und den Systemeigenschaften gewählt werden können. Ein weiterer Adapter dient zum Anschluss des Zwei-Kamera-System an das *Leica DMRM* Mikroskop. Das Zwei-Kamera-System nutzt dabei den Anschluss des Binokulartubus und kann demnach an Mikroskope verschiedenster Hersteller angebaut werden, indem das Adapterstück entsprechend angepasst wird. Wie auch die Mechanik für das sequentielle Sys-

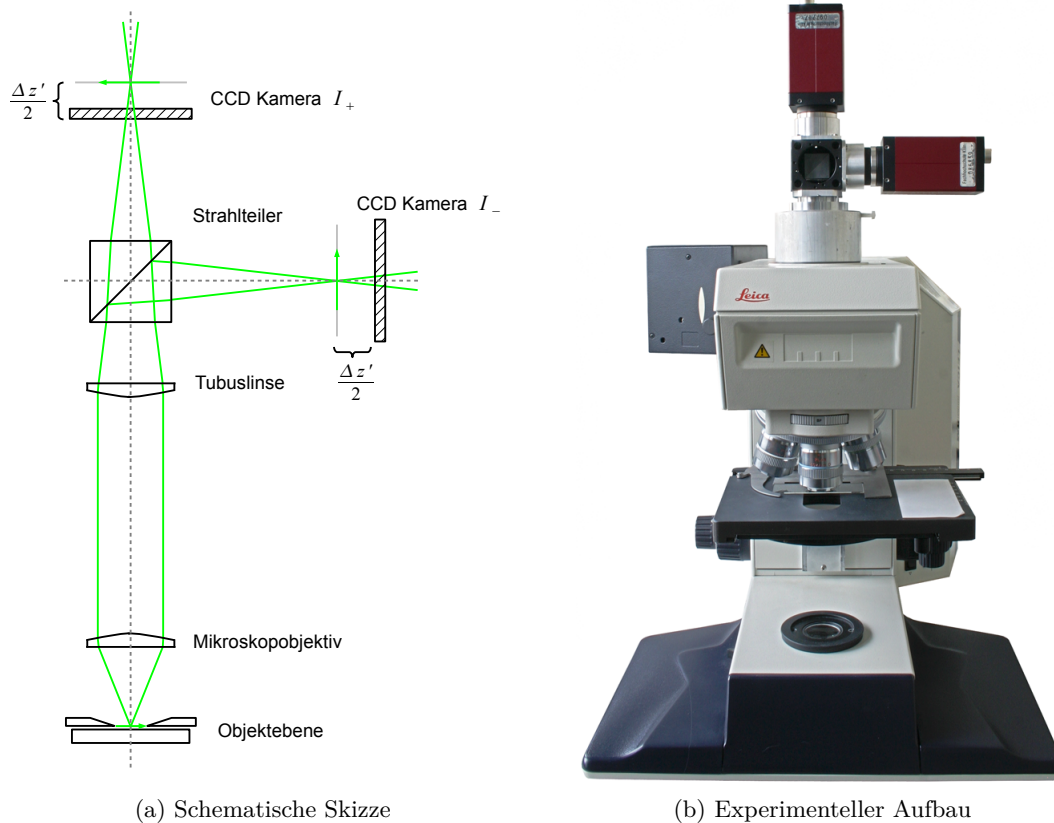


Abbildung 4.2: Schematische Skizze und experimenteller Aufbau des Echtzeit-Systems: Abbildung (a) zeigt eine schematische Skizze und (b) den tatsächlich realisierten Aufbau. Zu sehen ist das *Leica DMRM* Auflicht-Mikroskop, wobei der Binokulartubus des Mikroskopes durch das Zwei-Kamera-System ersetzt wurde.

tem aus dem vorangegangenen Abschnitt wurden die Anschlussadapter für die Kameras und das Anschlussstück zum Mikroskop selbst konstruiert und in der fakultätseigenen Werkstatt hergestellt.

Während beim zeit-sequentiellen Systems aus Abschnitt 4.2.1 die Defokussierung im Objektraum stattfindet, wird diese beim Echtzeit-System im Bildraum realisiert. Dies hat zur Folge, dass im Falle des Echtzeit-Systems die Defokusdistanz  $\Delta z$  deutlichen Einfluss auf die Vergrößerung des Mikroskopes nimmt. Da nach Gleichung (2.25) die Differenz der beiden Intensitätsverteilungen  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  die entscheidende Eingangsgröße darstellt, müssen bei der Rekonstruktion der Phasenverteilung die unterschiedlichen Vergrößerungen der beiden Aufnahmen berücksichtigt werden. Des Weiteren gilt zu beachten, dass aufgrund des flexiblen Aufbaus des Zwei-Kamera-Systems zusätzlich auch eine Translation, Rotation und/oder Scherung zwischen den beiden Kamerabildern vorliegen kann. Über die Justierschrauben des Prismenträgers (*G065089000* von LINOS [157]) und durch Drehung der Kameras kann eine manuelle Korrektur der Translation

und Rotation der beiden Kamerabilder zueinander erfolgen. Nach Gleichung (2.25) ist eine pixelgenaue Positionierung der Intensitätsverteilungen zueinander notwendig, welche aber durch eine rein manuelle Korrektur nicht gewährleistet werden kann. Berücksichtigt man auch die erforderliche Korrektur der Vergrößerung, so lassen sich die Faktoren Streckung und Stauchung, Translation, Rotation und Scherung in einer projektiven Transformation zwischen den Aufnahmen  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  beschreiben.

Die projektive Transformation ist ein gängiges Werkzeug der digitalen Bildverarbeitung und ihre Softwareimplementierung in der entsprechenden Standardliteratur zu finden [159]. Zur Berechnung der entsprechenden Transformationsmatrix sind in den beiden Bildern lediglich vier Punkte auszuwählen, welche aufeinander abzubilden sind. Da es bei der projektiven Transformation zur Überführung von diskreten Pixelpositionen in kontinuierliche kommt, muss bei der Berechnung des transformierten Bildes eine Interpolation der Pixelwerte vorgenommen werden. In der Arbeit wurde dabei auf die bilineare Interpolation zurückgegriffen, bei welcher ein Pixel im transformierten Bild aus den vier Nachbarn im ursprünglichen Bild interpoliert wird. Die bilineare Interpolation bot dabei den optimalen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit.

Beim Einsatz des Zwei-Kamera-Systems muss neben den geometrischen Korrekturen außerdem beachtet werden, dass jeder der beiden CCD-Sensoren ein individuelles Verhalten bezüglich Empfindlichkeit, Rauschen und Dunkelstrom aufweist. Des Weiteren ist selbst bei optimal eingestellter Köhlerscher Beleuchtung unter realen experimentellen Bedingungen eine absolut homogene Beleuchtung auf den beiden CCD-Sensoren kaum zu realisieren. Zusätzlich kann sich durch ein ungleichmäßiges Teilungsverhältnis des Strahlteilers, Verunreinigungen oder Reflexen im Strahlengang die Beleuchtung in den beiden defokussierten Ebenen unterscheiden, was ebenfalls einen negativen Einfluss auf die Rekonstruktion der Phasenverteilung hat.

Diese Schwierigkeiten bringt das zeit-sequentielle System nicht mit sich, da die gewonnenen Intensitätsverteilungen von der selben Kamera stammen, und somit individuelle Eigenschaften des CCD-Sensors und der Beleuchtung nach Gleichung (2.25) keine Auswirkung auf die Phasenrekonstruktion haben.

Um den Einfluss der beiden unterschiedlichen Kamera-Chips auf die Messungen zu minimieren, wird jede Kamera kalibriert und eine sogenannte *shading correction* durchgeführt. Bei der *shading correction* wird jedem Pixel auf dem Chip ein Faktor zugeordnet, so dass trotz inhomogener Beleuchtung die Kamera eine homogene Intensitätsverteilung liefert [160]. Alle Operationen lassen sich direkt auf dem Sensor durchführen und bleiben im internen Speicher der Kamera [149]. Bei jeder Bildübertragung werden die Operationen automatisch auf das aktuelle Bild angewandt und müssen somit nicht mehr in der Software zur Phasenrekonstruktion berücksichtigt werden. Vor Beginn einer Messung mit dem Echtzeit-System müssen demzufolge verschiedene Schritte der Justage und Kalibrierung durchgeführt werden. Der Ablauf lässt sich grob in die folgenden Schritte aufteilen:

1. Festlegen und Einstellen der Defokusdistanz durch entsprechende Abstandringe zwischen dem Skelettwürfel und den Kameras.
2. Manuelle Korrektur der Bildlagen zueinander über Justierschrauben am Prismenträger und Drehung der Kameras unter Verwendung eines geeigneten Kalibrierobjektes (zum Beispiel

Objektmikrometer).

3. Festlegen der Koordinaten für die projektive Transformation unter Verwendung eines geeigneten Objektes. Auf den beiden Kamerabildern  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$  werden jeweils vier Koordinaten für die gleichen markanten Punkte des Objektes bestimmt. Mit Hilfe dieser acht Punkte wird anschließend die anzuwendende Transformationsmatrix berechnet [159].
4. Durchführen der *shading correction* und Kalibrierung der Kameras direkt auf dem Sensor (ohne Objekt) [160].

Das gleichzeitige Aufzeichnen der Intensitätsverteilungen, und damit das Zwei-Kamera-System, ist nur eine Vorbedingung für die Realisierung eines Echtzeit-Systems zur Phasenrekonstruktion. Selbstverständlich muss auch die Gleichung zur Rekonstruktion der Phasenverteilung in einem Algorithmus umgesetzt werden, welcher sich nahezu in Echtzeit berechnen lässt. Dies wurde dadurch erzielt, dass die im Kapitel 3.1.2 eingeführten Algorithmen auf parallel arbeitenden Prozessoren implementiert und gelöst wurden [42, 51, 52]. Die meistverbreiteten Einheiten für parallele Berechnungen sind die sogenannten Graphic Processing Units (GPUs), die heutzutage auf der Grafikkarte fast jedes Standardcomputers zu finden sind. Mit Hilfe der Programmiersprache Nvidia CUDA C kann die parallele und deshalb schnelle Berechnung von Gleitkommaoperationen auf herkömmlichen Nvidia GPUs relativ einfach umgesetzt werden [161]. Im Rahmen der Arbeit wurde deshalb Nvidia CUDA C 3.2 eingesetzt, um die Vorteile von GPUs auszunutzen. Das Programm zur Phasenrekonstruktion, welches auch die projektive Transformation und bilineare Interpolation der Intensitätsverteilungen beinhaltet, lief dabei auf einem Windows 7 64Bit Rechner mit einer Intel Core i7 920 - QuadCore 2.67GHz CPU, 12 GB DDR-RAM und einer Nvidia GeForce GTX460 GPU mit 336 Prozessorkernen à 1.35GHz [161]. Das Aufzeichnen der Intensitätsverteilungen  $I_+(\mathbf{r})$  und  $I_-(\mathbf{r})$ , deren Transformation und Interpolation und die anschließende Berechnung der Phasenverteilung nach Gleichung (2.17) läuft dabei in einer kontinuierlichen Schleife. Um eine gleichzeitige Bildaufnahme zu garantieren, wurde an beide Kameras ein Triggersignal gesendet. Damit konnte eine Verzögerung der Synchronisation beider Kameras von unter  $4\mu\text{sec}$  realisiert werden [42]. Aufgrund der Synchronisation und der Implementierung aller notwendigen Algorithmen auf einer GPU konnte die quantitative Rekonstruktion der Phasenverteilung eines Objektes mit bis zu 28 Bildern pro Sekunde realisiert werden [42, 51, 52]. Die Verwendung von GPUs zur Rekonstruktion von Phasenverteilungen wurde auch von Loomis et al. publiziert [162]. Das Verfahren stützt sich dabei aber auf die bereits vorgestellte Methode von Waller et al. [133], welche die chromatische Aberration eines optischen Systems ausnutzt. Zusätzlich basiert die Lösungsgleichung auf der Annahme des unbegrenzten freien Raumes. Beide Punkte wurden bereits diskutiert und ihre Schwächen aufgezeigt, weshalb der hier gewählte Ansatz als praktikabler anzusehen ist.





## 5 Experimentelle Ergebnisse, Auswertung und Anwendung

Mit den beiden in Kapitel 4 eingeführten experimentellen Aufbauten (sequentielles und Echtzeit-System) wurden Messungen an verschiedenen Objekten vorgenommen. Die untersuchten Objekte wurden dabei in die Klassen der technischen und biologischen Proben eingeteilt. Da technische Proben von Seiten der Hersteller meist ausreichend charakterisiert bzw. Vergleichsmessungen möglich sind, ist diese Klasse von Objekten ideal zur quantitativen Beurteilung des in der Arbeit vorgestellten deterministischen Rekonstruktionsverfahrens geeignet. Biologische Proben hingegen können mit dem Verfahren zwar quantitativ vermessen werden, aber eine Bewertung der Ergebnisse kann aufgrund mangelnder Vergleichsmöglichkeiten im Endeffekt nur qualitativ erfolgen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels soll außerdem aufgezeigt werden, welche zusätzlichen Anwendungsmöglichkeiten sich durch die Kenntnis der Amplituden- und Phasenverteilung eines Objektes ergeben.

### 5.1 Experimentelle Ergebnisse und Auswertung

Im Folgenden werden Messungen diverser Objekte vorgestellt, wobei im Fall technischer Proben Vergleiche zu Herstellerangaben oder Vergleichsmessungen zur Beurteilung der Resultate herangezogen werden. Einige der experimentellen Ergebnisse wurden bereits in [42, 52, 53] publiziert.

#### 5.1.1 Technische Proben

Bei den technischen Proben handelt es sich um ein Partikelstandard, um zwei verschiedene Stepindex-Glasfasern und eine Mikrolinse. Das Partikelstandard sowie die Glasfasern wurden im Durchlicht vermessen, wohingegen die Mikrolinse nach Aufbringen einer dünnen Goldschicht unter einem Auflichtmikroskop untersucht wurde. Die durchsichtigen Proben wurden vor dem Experiment zusammen mit einem Immersionsöl auf einen Objektträger aufgebracht und mit einem Deckglas abgedeckt. Um zu garantieren, dass das Deckglas waagrecht auf der Probe aufliegt, wurde jeweils mehrere Partikel bzw. Faserstücke auf dem Objektträger positioniert [163]. Die Brechzahl der Immersion wurde dabei so gewählt, dass sie nur geringfügig von der nominalen Brechzahl des zu untersuchenden Materials abweicht [42, 53]. Die quantitative Auswertung der Ergebnisse erfolgt unter anderem nach der in Abschnitt 3.2.4 vorgestellten *least-square fit* Methode. Die Auswirkungen unterschiedlichster Einflüsse auf das Messverfahren wurden bereits in verschiedenen Arbeiten evaluiert und sollen deshalb in diesem Abschnitt nicht mehr aufgegriffen werden. Insbesondere gilt es hier die Experimente von Horstmann und Matrisch zu erwähnen, die den Kohärenzgrad der Lichtquelle, die Immersion, das Rauschen des Sensors, Abbildungsfehler, Bildhelligkeit sowie die Defokusbildung und Reproduzierbarkeit gezielt untersuchten [104, 105].

### Partikelstandard

Als einfaches Untersuchungsobjekt diente ein vom *National Institute of Standards and Technology* (NIST) zertifiziertes Partikelstandard von Duke Scientific (Katalognummer 9020). Bei dem Standard handelt es sich um eine Glaskugel aus Borosilikatglas mit einem nominalen Durchmesser von  $d_{\text{nom}} = 20\mu\text{m}$  und einer Brechzahl von  $n_{\text{nom}} = 1,56$  bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 589\text{nm}$  [164]. Die Probe wurde in eine Immersion mit der Brechzahl  $n_{\text{Immersion}} = 1,555$  eingebettet, wobei die Brechzahl mit einem Abbe-Refraktometer von Carl Zeiss überprüft wurde [165]. Die Aufnahmen des Partikelstandards aus unterschiedlichen Ebenen wurde mit dem sequentiellen System aus Abschnitt 4.2.1 vorgenommen. Als Beleuchtungseinheit wurde an das *Leitz Orthoplan* Mikroskop die Natrium-Gasentladungslampe ( $\lambda = 589\text{nm}$ ) zusammen mit der *MSQ* angebracht (siehe Abschnitt 4.1.2). Das *Orthoplan* Mikroskop besitzt einen Tubusfaktor

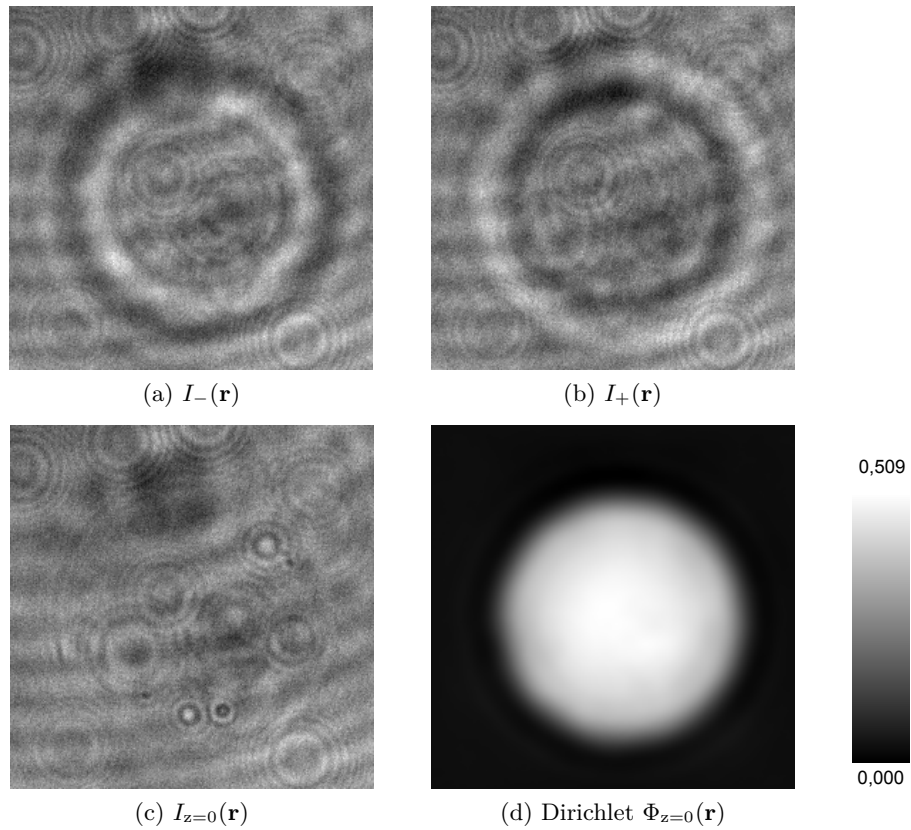


Abbildung 5.1: Aufgenommene Intensitätsverteilungen und rekonstruierte Phasenverteilung des Partikelstandards: Abbildung (a) zeigt die Aufnahme aus der Ebene  $z = -9\mu\text{m}$ , (b) das Bild aus der Ebene  $z = +9\mu\text{m}$  und (c) das Fokusbild aus der Ebene  $z = 0$ . In (d) ist die rekonstruierte Phasenverteilung im Fall von Dirichlet-Randbedingungen zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Phasenwerte  $[0; 0,509]$   $\text{rad}$ .

von  $0.7875\times$ , was bei einer Abbildung der Glaskugel mit einem *Leitz NPL Fluotar 100/1,32 Oil* Objektiv eine resultierende Gesamtvergrößerung [nach Gleichung (4.1)] von  $78,75\times$  ergibt. In Abbildung 5.1 sind die Eingangsdaten und das Ergebnis, mit einer Auflösung von  $256\times 256$  Pixel, zusammengestellt. Die Bilder 5.1(a)-5.1(c) zeigen die Aufnahmen aus den unterschiedlichen Ebenen, wobei deutliche Störungen auf den Bildern zu sehen sind. Es zeigt sich allerdings, dass diese Störungen objektunabhängig sein müssen, da sie in jeder Aufnahme trotz Defokussierung nahezu gleich sind. Vermutlich beruhen diese Bildartefakte auf Schmutzpartikeln und internen Reflexionen innerhalb des Mikroskopes und der Kamera. Wie in der rekonstruierten Phasenverteilung in Abbildung 5.1(d) zu sehen, haben diese Störungen aber kaum Einfluss auf das Messergebnis, da sie sich durch die Differenzbildung nach Gleichung (2.25) nahezu auslöschen. Zur besseren Sichtbarkeit wurden die Grauwerte der unter Dirichlet-Randbedingungen berechneten Phasenverteilung invertiert. Die Abbildung 5.1(d) kann demnach als objektinduzierter Phasenversatz interpretiert werden. Eine exemplarische Schnittlinie (grün, Quadrat) durch die rekonstruierten Verteilungen ist in Abbildung 5.2 zu sehen. Der Schnitt erfolgte dabei horizontal durch die Mit-

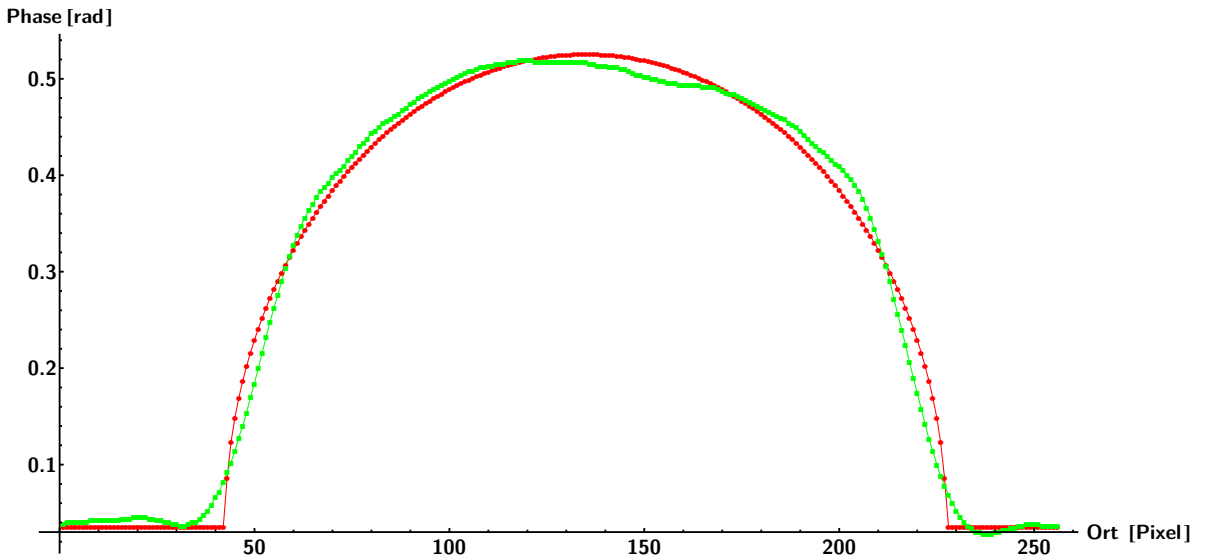


Abbildung 5.2: Exemplarische horizontale Schnittlinie ( $N_y = 120$ ) durch die rekonstruierte Verteilung aus 5.1(d) unter Dirichlet-Randbedingungen (grün, Quadrat) zusammen mit der entsprechenden Fit-Funktion (rot, Kreis).

te der Glaskugel bei  $N_y = 120$ . Zur quantitativen Bewertung des Rekonstruktionsergebnisses wurde der Fit-Algorithmus aus Abschnitt 3.2.4 auf das Partikelstandard angewandt. Als geometrische Größe ging dabei nur der gemessene Durchmesser  $d$  der Glaskugel in die *least-square fit* Methode mit ein. Der nominale Durchmesser der Partikelstandards liegt laut Hersteller bei  $d_{\text{nom}} = 20\mu\text{m}$ . Vor der Auslieferung an den Endkunden werden die Partikel vom NIST auf ihre tatsächliche Größe hin vermessen. Diese Zertifizierungsmessung des NIST ergab für die hier untersuchte Charge einen zertifizierten Durchmesser von  $d_{\text{zer}} = 17,3 \pm 1,4\mu\text{m}$ . Das in Abbildung 5.1 gezeigte Partikelstandard weist jedoch einen Durchmesser von  $d \approx 15,2\mu\text{m}$  auf, welcher

auch als geometrische Größe in die *least-square fit* Methode mit einging. Die *least-square fit* Methode ergab für diese Schnittlinie eine Brechzahl des Partikelstandards von  $n_{\text{fit}} \approx 1,558$ , welche offensichtlich sehr nahe an der nominalen Brechzahl von  $n_{\text{nom}} = 1,56$  liegt. Die errechnete Fit-Funktion (rot, Kreis) ist ebenfalls in Abbildung 5.2 gezeigt. Abweichungen zwischen der rekonstruierten Phasenverteilung und der Fit-Funktion sind hauptsächlich am Übergang zwischen Borosilikatglas und Immersionmedium zu beobachten. Dies bestätigt das Resultat der Simulation aus Abschnitt 3.2.1, da der Algorithmus nicht in der Lage ist, so hohe Phasengradienten zu rekonstruieren.

### Stepindex-Glasfasern

Die Charakterisierung von Glasfasern stellt seit ihrer großtechnischen Produktion eine messtechnisch anspruchsvolle Aufgabe dar [163, 166–173]. Der Grund dafür ist, dass sich die Brechzahl des Kerns und vor allem die des Mantels während des Ziehprozesses der Fasern verändern kann. Diese Abweichungen der Brechzahlen der gezogenen Fasern zu den Brechzahlen der Preformen entstehen durch sich ändernde externe Einflüsse, wie zum Beispiel Temperatur, Druck und Ziehgeschwindigkeit während des Herstellungsprozesses [174]. Eine Abweichung der Brechzahlen von Kern und Mantel verursacht aber direkt eine Änderung der nominalen Apertur der Glasfaser [siehe Gleichung (3.11)]. Demzufolge ist es für Hersteller von Glasfasern unabdingbar, die Brechzahlverteilungen ihrer gezogenen Glasfasern zu überprüfen, um im Falle einer zu großen Abweichung zur nominalen Apertur den Produktionsprozess entsprechend anpassen zu können [53]. Im Weiteren sollen zwei unterschiedliche Stepindex-Glasfasern vermessen und ihre Brechzahlen bzw. Aperturen mit Hilfe der *least-square fit* Methode aus Abschnitt 3.2.4 ermittelt werden.

**AS 100/140 IRAN** Die AS 100/140 IRAN ist eine Multimode-Stepindex-Glasfaser der Fiber-Tech GmbH. Die Abkürzung AS in der Produktbeschreibung steht für *all silica*, die Zahlen 100 und 140 für die nominalen Durchmesser des Kern  $d_{\text{Kern,nom}}$  und des Mantels  $d_{\text{Mantel,nom}}$  der gezogenen Faser in  $\mu\text{m}$ , IR beschreibt den Einsatzbereich der Faser im sichtbaren und nahen Infrarotbereich ( $450 - 2200\text{nm}$ ) und die Buchstaben A und N bezeichnen das Material des *coating* und *jacket*, hier Acrylat und Nylon, der Faser [175]. Die Brechzahlen der Preform der Glasfaser sind laut Hersteller  $n_{\text{Kern,pre}} = 1.457$  und  $n_{\text{Mantel,pre}} = 1.439$  bei  $\lambda = 632\text{nm}$ . Nach Gleichung (3.11) ergibt sich für die Apertur der Preform  $A_{\text{pre}} \approx 0.228$ . Auch diese Faserprobe wurde mit dem sequentiellen Messsystem untersucht, wobei, wie bereits erwähnt, mehrere Faserstücke in eine Immersion mit der Brechzahl  $n_{\text{Immersion}} = 1.446$  eingebettet wurden. Die Abbildung erfolgte über ein *Leitz NPL Fluotar 16/0,45* Objektiv, was bei einem Tubusfaktor des *Orthoplan* Mikroskopes von  $0.7875\times$  auf eine Gesamtvergrößerung von  $12,6\times$  führt. Bei dieser Messung diente als Lichtquelle der HeNe-Laser zusammen mit der *MSQ* aus Abschnitt 4.1.2. Somit konnte die Messung bei derselben Wellenlänge vorgenommen werden, welche auch der Hersteller der Preform zur Charakterisierung seiner Brechzahlen verwendet. Die drei Intensitätsverteilungen aus den Ebenen  $z = -10\mu\text{m}$ ,  $z = 0$  und  $z = +10\mu\text{m}$  sind neben der rekonstruierten Phasenverteilung unter Neumann-Randbedingungen in Abbildung 5.3 zu sehen. Die Auflösung der Bilder beträgt jeweils  $512 \times 512$  Pixel. Die resultierende Phasenverteilung aus Abbildung 5.3(d) wurde anschließend mit der in Abschnitt 3.2.4 eingeführten *least-square fit* Methode auf die

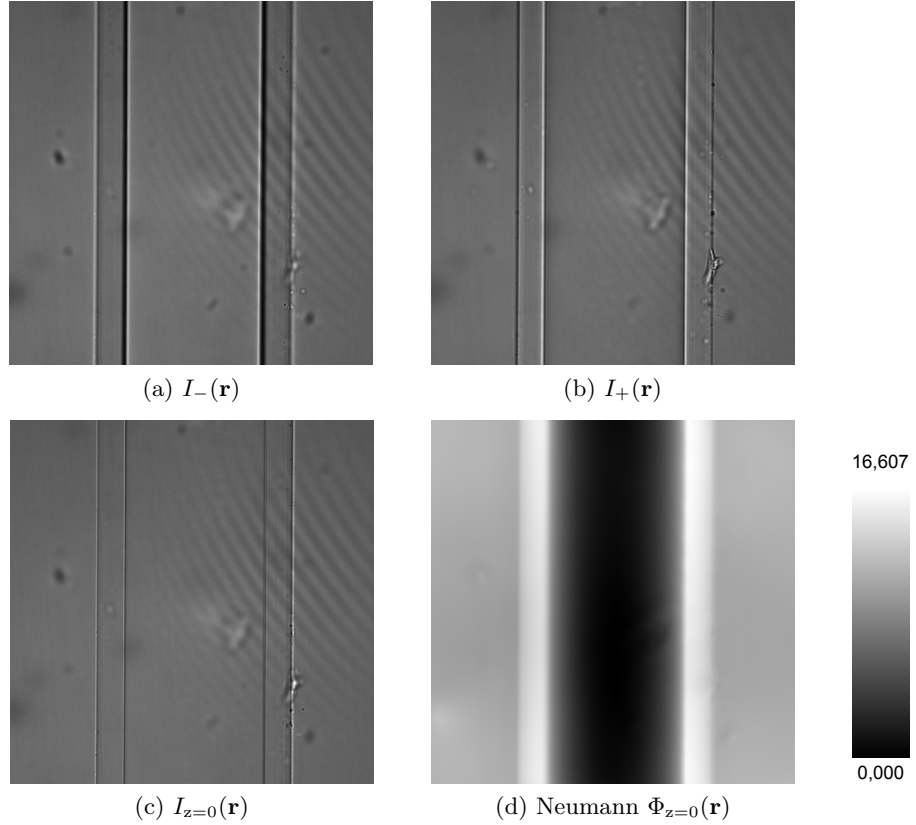


Abbildung 5.3: Aufgenommene Intensitätsverteilungen und rekonstruierte Phasenverteilung der Faser AS 100/140 IRAN: Abbildung (a) zeigt die Aufnahme aus der Ebene  $z = -10\mu m$ , (b) das Bild aus der Ebene  $z = +10\mu m$  und (c) das Fokusbild aus der Ebene  $z = 0$ . In (d) ist die rekonstruierte Phasenverteilung im Fall von Neumann-Randbedingungen zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Phasenwerte  $[0; 16,607] \text{ rad}$ .

Brechzahlen von Kern und Mantel hin untersucht. Die für die Fit-Funktion notwendigen geometrischen Parameter der Faser wurden unter Annahme einer perfekten coaxialen Form aus der fokussierten Aufnahme [siehe Abbildung 5.3(c)] gewonnen [53]. Die Durchmesser von Kern und Mantel wurde mit  $d_{\text{Kern}} \approx 102.2\mu m$  und  $d_{\text{Mantel}} \approx 140.2\mu m$  ermittelt und zeigen damit nur minimale Abweichungen zu den Nominalwerten. In Abbildung 5.4 ist eine exemplarische horizontale Schnittlinie (grün, Quadrat) durch die Mitte ( $N_y = 256$ ) der rekonstruierte Verteilung aus Abbildung 5.3(d) zusammen mit der entsprechende Fit-Funktion (rot, Kreis) gezeigt. Wie auch im Fall des Partikelstandards ist eine Abweichung zwischen der Schnittlinie und der Fit-Funktion hauptsächlich an den Materialübergängen sichtbar, da hier der Phasengradient besonders steil ist. Ein vergleichbares Ergebnis konnte auch schon im Rahmen der Simulationen in Abschnitt 3.2.2 gezeigt werden. Die *least-square fit* Methode ergab für die Brechzahlen von Kern und Mantel  $n_{\text{Kern,fit}} = 1.4570 \pm 0.0002$  und  $n_{\text{Mantel,fit}} = 1.4416 \pm 0.0001$  und damit

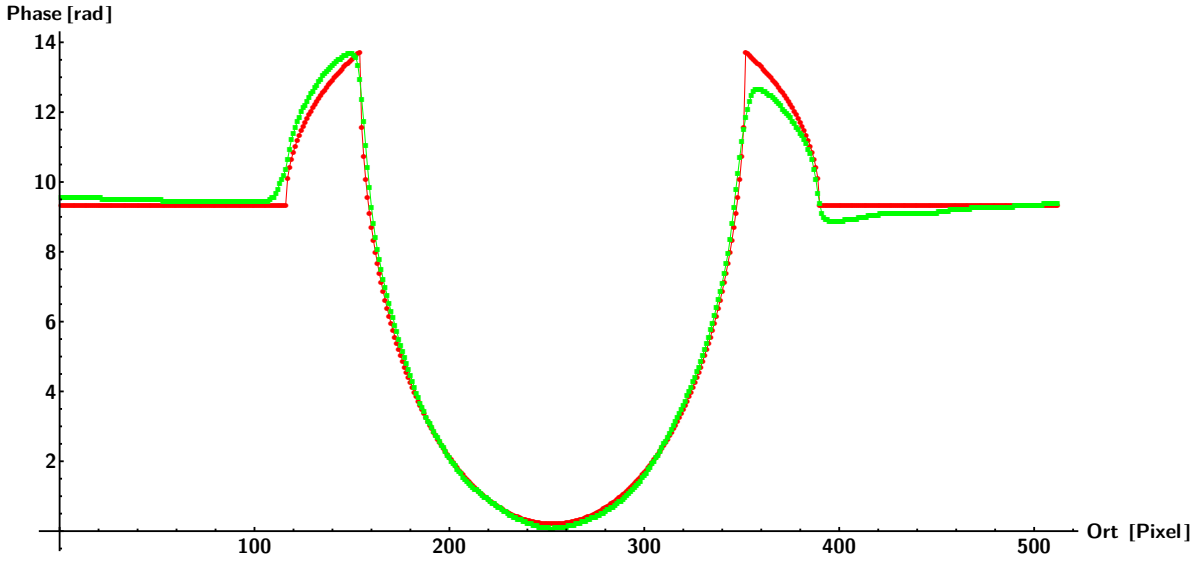


Abbildung 5.4: Exemplarische, horizontale Schnittlinie ( $N_y = 256$ ) durch die rekonstruierte Verteilung aus 5.3(d) unter Neumann-Randbedingungen (grün, Quadrat) zusammen mit der entsprechenden Fit-Funktion (rot, Kreis).

eine resultierende Apertur von  $A_{\text{fit}} = 0.2114 \pm 0.0009$ . Die Berechnung folgte dabei streng dem in Abschnitt 3.2.4 eingeführten Auswerteverfahren. Anhand der geringen Standardabweichung bestätigt sich die Annahme der coaxialen Geometrie der Faser und eines stabilen Algorithmus zur Phasenrekonstruktion. Ein Vergleich mit den Brechzahlen der Preform ( $n_{\text{Kern,pre}} = 1.457$  und  $n_{\text{Mantel,pre}} = 1.439$ ) zeigt außerdem, dass die Brechzahl des Mantels der gezogenen Faser eine größere Abweichung aufweist als die des Kerns. Dies bestätigt die Annahmen, welche schon einführend bezüglich des Produktionsprozesses gemacht wurden [174].

**780HP** Als zweite zu untersuchende Glasfaser wurde die Monomode-Stepindex-Faser 780HP von Thorlabs gewählt. Die Spezifikationen der Faser sind laut Herstellerangaben: ein Durchmesser des Kerns und Mantels von  $d_{\text{Kern}} = 5,0 \pm 0,5 \mu\text{m}$  und  $d_{\text{Mantel}} = 125,0 \pm 1,5 \mu\text{m}$ , ein einsetzbarer Wellenlängenbereich von  $[780; 970] \text{ nm}$  und eine Apertur von  $A = 0,13$  [176]. Dieses Objekt wurde erstmals mit dem im Abschnitt 4.2.2 vorgestelltem Echtzeit-System vermessen. Demzufolge wurden nur zwei Intensitätsaufnahmen zur Rekonstruktion der Phasenverteilungen verwendet [42, 51, 52]. Im Fall des Echtzeit-Systems diente als Lichtquelle lediglich die Standardbeleuchtung des *Leica DMR* Mikroskopes, eine Halogenlampe. Um zu garantieren, dass die Faser mit einer Wellenlänge beleuchtet wird, die ihren Spezifikationen entspricht, wurde das Spektrum der Halogenlampe mit dem Thorlabs Bandpassfilter FB800-40 [177] gefiltert. Die Intensitätsverteilungen aus den beiden Ebenen  $z = -2,5 \mu\text{m}$  und  $z = +2,5 \mu\text{m}$  wurden mit einer Auflösung von  $1024 \times 1024$  Pixel und einem *Leica PL Fluotar*  $40\times/0,7$  Objektiv aufgenommen. Die Faserprobe wurde wiederum in ein mit dem Abbe-Refraktometer verifiziertes Immersionsöl der Brechzahl  $n_{\text{Immersion}} = 1,4548$  eingebettet. Die rekonstruierte Phasenverteilung sowie die

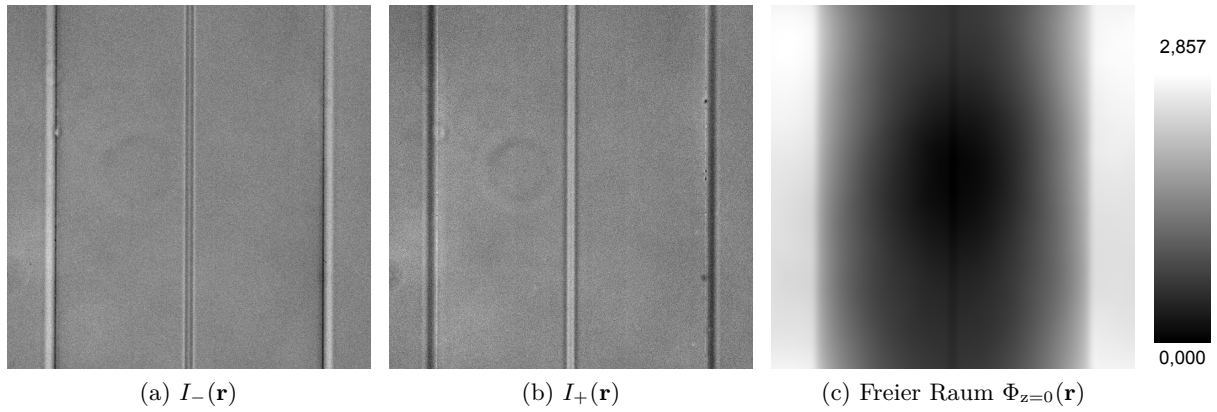


Abbildung 5.5: Aufgenommene Intensitäts- und rekonstruierte Phasenverteilung der Faser 780HP: Abbildungen (a) und (b) zeigen die Aufnahmen aus den Ebenen  $z = -2,5\mu\text{m}$  und  $z = +2,5\mu\text{m}$ . In (c) ist die rekonstruierte Phasenverteilung unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Phasenwerte  $[0; 2,857]$  rad.

Intensitätsaufnahmen sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Berechnung der Phasenverteilung erfolgte diesmal unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes. Wie auch bei dem vorangegangenen Objekt wurde mit Hilfe der *least-square fit* Methode die Brechzahlverteilung und

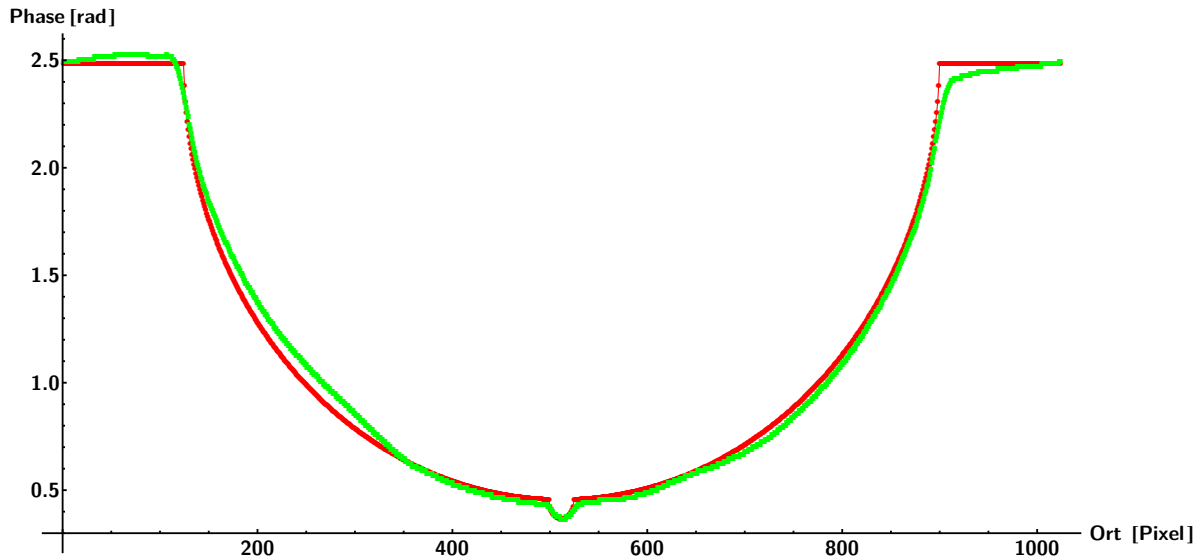


Abbildung 5.6: Exemplarische horizontale Schnittlinie ( $N_y = 830$ ) durch die rekonstruierte Verteilung aus 5.5(c) unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes (grün, Quadrat) zusammen mit der entsprechenden Fit-Funktion (rot, Kreis).

damit die Apertur der Glasfaser bestimmt. Eine exemplarische Schnittlinie ( $N_y = 830$ ) und die entsprechende Fit-Funktion ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Wie aus der Abbildung ersichtlich, ist selbst die geringe Phasenstörung, die durch den Kern der Monomode-Glasfaser verursacht wird, klar erkennbar. Die Brechzahlen von Kern und Mantel wurden mit  $n_{\text{Kern,fit}} = 1,4623 \pm 0.0017$  und  $n_{\text{Mantel,fit}} = 1.4571 \pm 0.0001$  bestimmt [42]. Die Apertur der Faser ergibt sich demnach zu  $A = 0,1218 \pm 0,0194$ , wobei die Auswertung wiederum nach Abschnitt 3.2.4 erfolgte. Im Vergleich zur Herstellerangabe ( $A = 0,13$ ) kann dies als hinreichend gute Übereinstimmung gewertet werden.

### Mikrolinse

Als letztes technisches Objekt wurde eine Mikrolinse untersucht. Wiederum kam das Echtzeit-System zum Einsatz, wobei im Gegensatz zur Glasfaser 780HP das Zwei-Kamera-System (siehe Abschnitt 4.2.2) nicht an dem Durchlicht- (*Leica DMR*), sondern an dem Auflichtmikroskop *Leica DMRM* angebracht wurde. Abbildung 4.2(b) zeigt ein Photo dieses Aufbaus. Erneut wurde als Lichtquelle die Halogenlampe, aber ohne Bandpassfilter, benutzt. Als abbildendes Objektiv wurde ein *Leitz Plan*  $50\times/0,75$  verwendet. Die beiden mit dem Echtzeit-System aufgenommenen Intensitätsverteilungen sind in den Abbildungen 5.7(a) und 5.7(b) dargestellt. Die Auflösung beträgt jeweils  $1024 \times 1024$  Pixel bei einer Defokussierung von  $z = \pm 5,5 \mu\text{m}$ . Da keinerlei Herstellerangaben über die Mikrolinse zugänglich waren, wurde eine Vermessung der Linse an einem  $\mu\text{surg}$  Konfokalmikroskop der NanoFocus AG vorgenommen [178]. Das Ergebnis der Konfokalmessung ist in Abbildung 5.7(c) zu sehen, wobei  $10,658 \mu\text{m}$  als maximale Höhe der Mikrolinse bestimmt wurde. Das Resultat des deterministischen Rekonstruktionsverfahrens unter Dirichlet-Randbedingungen ist in Abbildung 5.7(d) dargestellt. Die rekonstruierte Phasenstörung wurde hierbei unter Berücksichtigung einer Wellenlänge von  $\lambda = 550 \text{ nm}$  und einer Brechzahl von Luft  $n_{\text{Luft}} \approx 1$  direkt in eine Höhenverteilung umgerechnet. Um die Qualität der Messung zu beurteilen, wurde eine Schnittlinie durch die rekonstruierte Höhenverteilung und die Konfokalmessung gelegt. Beide Schnitte erfolgten vertikal durch die Mitte ( $N_x = 512$ ) der beiden Bilder 5.7(c) und 5.7(d). Abbildung 5.8 zeigt die beiden Schnitte, wobei die Konfokalmessung (rot, Kreis) und die Rekonstruktion mit Dirichlet-Randbedingungen (grün, Quadrat) vor allem am Rand der Mikrolinse Unterschiede aufweisen. Ein weiterer Vergleich der beiden Messungen erfolgte, indem mit Hilfe der *least-square fit* Methode aus der Höhenverteilung der Mikrolinse deren Krümmungsradius bestimmt wurde. In der Methode wurde dabei eine sphärische Form der Linse angenommen. Die entsprechenden Fit-Funktionen, für die Konfokalmessungen mit dem  $\mu\text{surg}$  Mikroskop (blau, Dreieck) und die der deterministischen Phasenrekonstruktion (schwarz, Raute), sind ebenfalls in Abbildung 5.8 zu sehen. Es zeigt sich, dass die Messung mit dem Konfokalmikroskop (rot, Kreis) und die entsprechende Fit-Funktion (blau, Dreieck) nahezu perfekt übereinander liegen. Demzufolge kann die Konfokalmessung die sphärische Geometrie der Linse ideal wiedergeben. Im Fall der deterministischen Phasenrekonstruktion (grün, Quadrat) hingegen ist die Abweichung zur entsprechenden sphärischen Fit-Funktion (schwarz, Raute) deutlich zu erkennen. Die Differenz zwischen Fit-Funktion und Rekonstruktion erhöht sich mit zunehmender Steigung der rekonstruierten Höhenverteilung. Diese Abweichungen zur Sollverteilung im Fall hoher Phasengradienten wurden auch schon in Abschnitt 3.2 im Rahmen der Simulationen erkannt. Die *least-square fit* Methode ergab für den Krümmungsradius der Mikrolinse  $r_{\text{Konf.,fit}} = 168,14 \mu\text{m}$  im Fall der Kon-



fokalmessung und  $r_{\text{det.,fit}} = 168,081\mu\text{m}$  für das deterministische Verfahren. Wie auch aus Abbildung 5.8 ersichtlich, unterscheiden sich die beiden Fit-Funktionen kaum in ihrer Gestalt, was die nahezu gleichen Krümmungsradien aus der *least-square fit* Methode bestätigt. In Bezug auf den Krümmungsradius liefert die Rekonstruktion mit Dirichlet-Randbedingungen, trotz Abweichung der Messung vom sphärischen Modell am Rand, ein zur Konfokalmessung vergleichbares Ergebnis. Außerdem gilt es anzumerken, dass im Fall der Messung mit dem NanoFocus Mikroskop 946 konfokale Einzelmessungen notwendig waren, um das entsprechende Messergebnis zu erhalten. Im Fall der deterministischen Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen wurden hingegen lediglich zwei Intensitätsaufnahmen benötigt und die Messung in Echtzeit durchgeführt. Folglich ist auch die Berechnungszeit bzw. die Messdauer der beiden Systeme deutlich unterschiedlich.

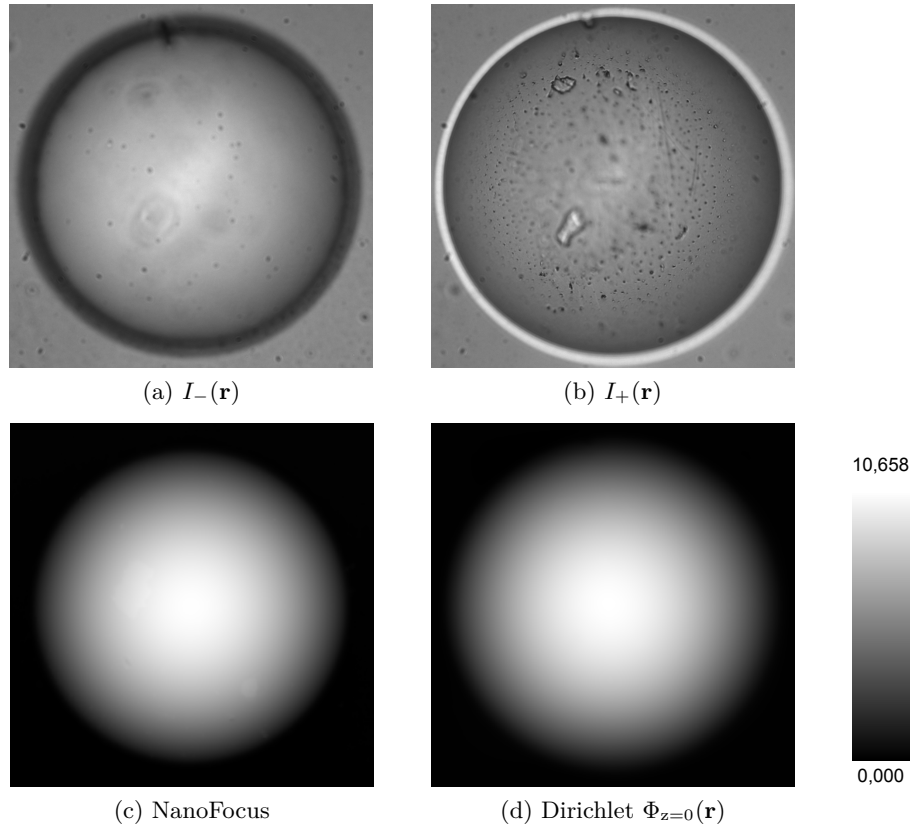


Abbildung 5.7: Aufgenommene Intensitäts- und rekonstruierte Höhenverteilungen der Mikrolinse: Abbildungen (a) und (b) zeigen die Aufnahmen aus den Ebenen  $z = -5,5\mu\text{m}$  und  $z = +5,5\mu\text{m}$ . In (c) ist die mit dem Konfokalmikroskop von NanoFocus gemessene Höhenverteilung und in (d) die rekonstruierte Verteilung im Fall von Dirichlet-Randbedingungen zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Höhenwerte  $[0; 10,658] \mu\text{m}$ .

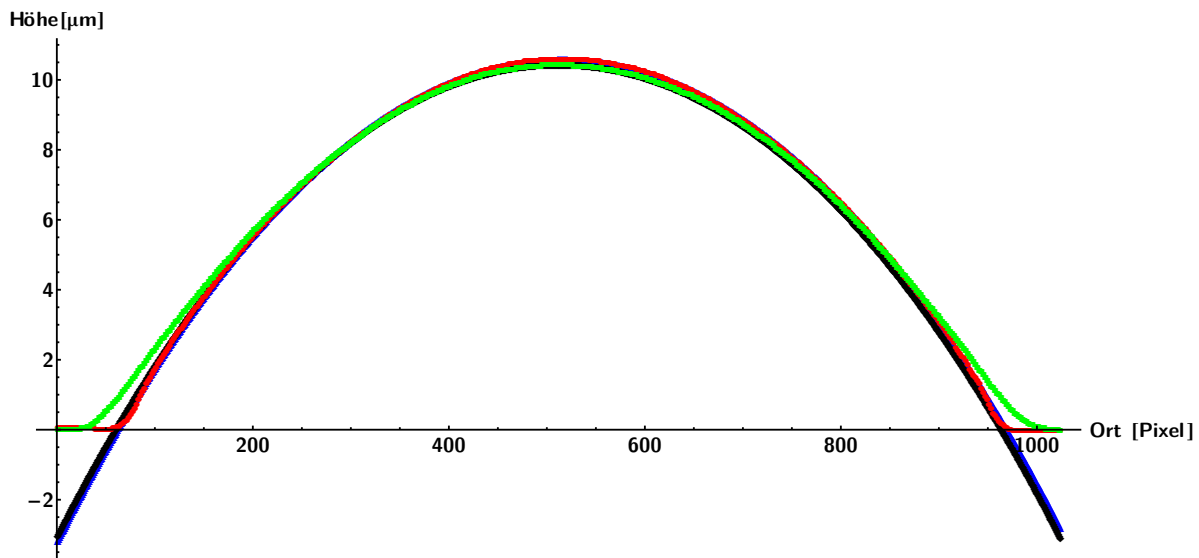


Abbildung 5.8: Exemplarische Schnittlinie durch die mit dem Konfokalmikroskop gemessene Höhenverteilung aus 5.7(c) (rot, Kreis) und die rekonstruierte Verteilung aus 5.7(d) unter Dirichlet-Randbedingungen (grün, Quadrat). Der Schnitt erfolgte jeweils vertikal durch die Mitte der Bilder ( $N_x = 512$ ). Ebenfalls dargestellt sind die Ergebnisse der *least-square fit* Methode: Fit-Funktion zur Konfokalmessung (blau, Dreieck) und zum deterministischen Rekonstruktionsverfahren (schwarz, Raute).

### 5.1.2 Biologische Proben

Im folgenden Abschnitt sollen die Untersuchungsergebnisse zu biologischen Proben präsentiert werden. Darunter fällt die Vermessung von roten Blutkörperchen (Erythrozyten), einer Zelle der menschlichen Mundschleimhaut und einer Kieselalge (Diatomee). Die für die Phasenrekonstruktion notwendigen Eingangsdaten, die Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen, wurden bei dieser Probenklasse alle mit dem Echtzeit-System in Durchlichtbeleuchtung (*Leica DMR* Mikrosop) gewonnen. Die Beleuchtung der Proben erfolgte jeweils mit einer Halogenlampe ohne Filter, wobei bei der Phasenrekonstruktion eine mittlere Wellenlänge dieser Lichtquelle von  $\lambda = 550\text{nm}$  angenommen wurde. Die darüber berechnete Höhenverteilung entspricht dabei der durch das Objekt induzierten optischen Weglänge.

#### Erythrozyten

Die Aufnahmen der roten Blutkörperchen (Erythrozyten) erfolgte mit einem *Fluator*  $100\times/1,30$  Oil Objektiv von *Leitz*, wobei die Auflösung der Kamera wiederum  $1024\times1024$  betrug. Die beiden Intensitätsverteilungen aus den Ebenen  $z = -2,5\mu\text{m}$  und  $z = +2,5\mu\text{m}$  sind zusammen mit der unter Dirichlet-Randbedingungen ermittelten Höhenverteilung in Abbildung 5.9 zu sehen. In der rekonstruierten Höhenverteilung 5.9(c) ist deutlich die typische Form der Erythrozyten zu erkennen: Sie erscheinen als bikonkave Scheibchen. Um dies besser veranschaulichen zu können,

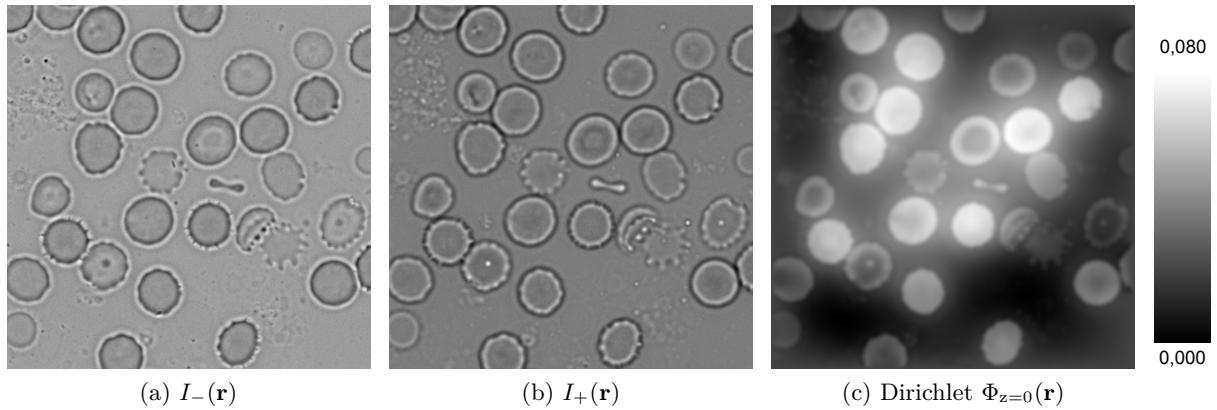


Abbildung 5.9: Aufgenommene Intensitäts- und rekonstruierte Höhenverteilungen von Erythrozyten: Abbildungen (a) und (b) zeigen die Aufnahmen aus den Ebenen  $z = -2,5\mu\text{m}$  und  $z = +2,5\mu\text{m}$ . In (c) ist die rekonstruierte Höhenverteilung im Fall von Dirichlet-Randbedingungen zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Höhenwerte  $[0; 0,080] \mu\text{m}$ .

ist in Abbildung 5.10 eine Falschfarben 3D-Darstellung der rekonstruierten Höhenverteilung aus Abbildung 5.9(c) zu sehen. Erste Schädigungen, die unter anderem durch Austrocknung entstehen, zeigen sich in der Deformation einiger Erythrozyten.

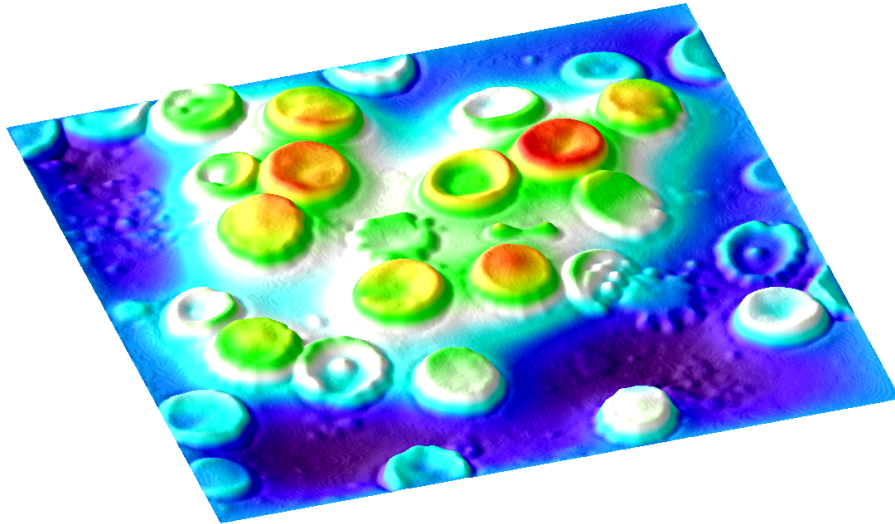


Abbildung 5.10: Falschfarben 3D-Darstellung der Erythrozyten aus 5.9(c).

### Mundschleimhaut

Als weitere biologische Probe wurde eine menschliche Mundschleimhautzelle untersucht. Die Vermessung erfolgte ebenfalls mit dem *Leitz Fluator* 100 $\times$ /1,30 Oil Objektiv. Schon in den

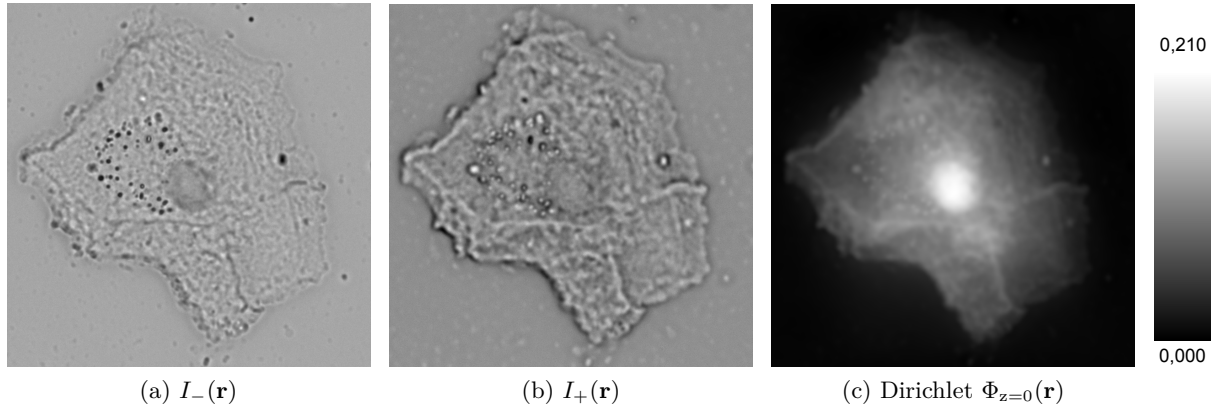


Abbildung 5.11: Aufgenommene Intensitäts- und rekonstruierte Höhenverteilungen einer Mundschleimhautzelle: Abbildungen (a) und (b) zeigen die Aufnahmen aus den Ebenen  $z = \pm 2,5 \mu\text{m}$ . In (c) ist die rekonstruierte Höhenverteilung im Fall von Dirichlet-Randbedingungen zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Höhenwerte  $[0; 0,210] \mu\text{m}$ .

beiden Intensitätsverteilungen  $I_-(\mathbf{r})$  und  $I_+(\mathbf{r})$ , welche in den Abbildungen 5.11(a) und 5.11(b) dargestellt sind, grenzt sich der Zellkern sichtbar von der restlichen Zelle ab. Der Zellkern besitzt eine höhere Brechzahl als sein Umgebung. Dies zeigt auch sehr deutlich die rekonstruierte Höhenverteilung in Abbildung 5.11(c), welche der objektinduzierten optischen Weglänge entspricht.

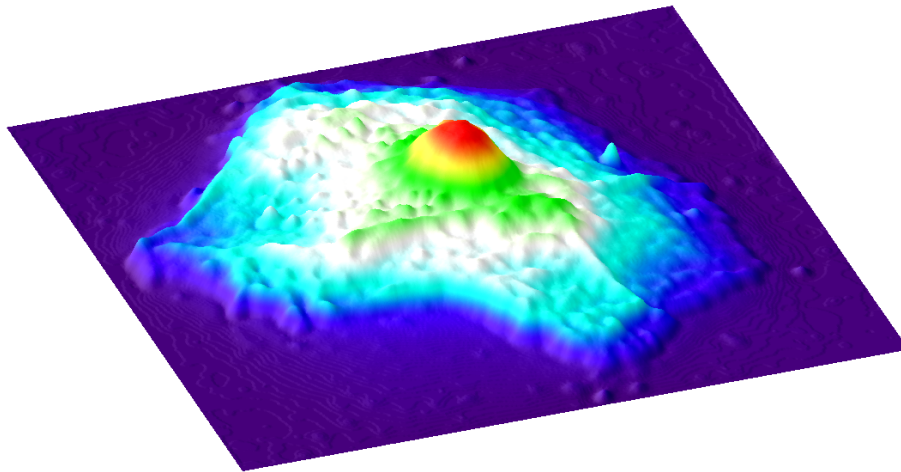


Abbildung 5.12: Falschfarben 3D-Darstellung der Mundschleimhautzelle aus 5.11(c).

Wie selbst kleine Details und Strukturen innerhalb der Zelle mit dem Rekonstruktionsverfahren sichtbar gemacht werden können, ist recht anschaulich in der Falschfarben 3D-Darstellung in Abbildung 5.12 zu sehen.

### Diatomee

Eine Kieselalge (Diatomee) soll als letzte Probe vorgestellt werden. Die Diatomee mit dem Namen *Triceratium Favus* wurde mit dem *Leitz Fluator*  $40\times/0,7$  Objektiv bei einer Auflösung von  $1024 \times 1024$  Pixel in den Ebenen  $z = \pm 3,125\mu m$  aufgenommen. Die Intensitätsverteilungen des *Triceratium Favus* sind in Abbildung 5.13 zusammen mit der unter Dirichlet-Randbedingungen rekonstruierten Höhenverteilung gezeigt. Die Rekonstruktion in Abbildung 5.13(c) zeigt Arte-

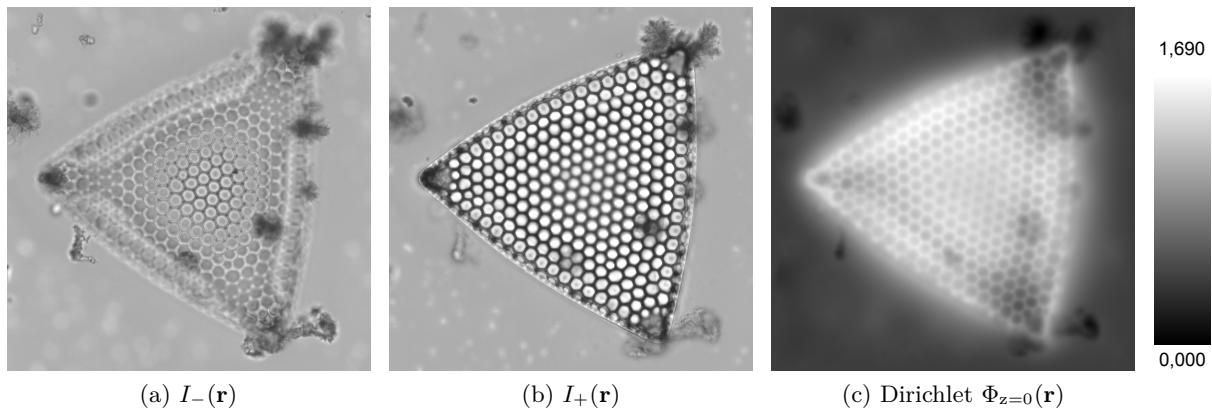


Abbildung 5.13: Aufgenommene Intensitäts- und rekonstruierte Höhenverteilungen einer Diatomee: Abbildungen (a) und (b) zeigen die Aufnahmen aus den Ebenen  $z = -3,125\mu m$  und  $z = +3,125\mu m$ . In (c) ist die rekonstruierte Höhenverteilung im Fall von Dirichlet-Randbedingungen zu sehen. Die Skala rechts zeigt die Zuordnung der Höhenwerte  $[0; 0, 270] \mu m$ .

fakte an den Ränder der Diatomee, welche vermutlich auf die Verschmutzung der Probe zurückzuführen sind. Gerade die Stellen des Objektes, welche Absorption aufweisen, führen in der errechneten Höhenverteilung zu lokalen Verzerrungen. Dessen ungeachtet zeigt sich, dass die Form und die feine Struktur des *Triceratium Favus* wiedergegeben werden kann. Dies bestätigt auch die Falschfarben 3D-Darstellung in Abbildung 5.14.

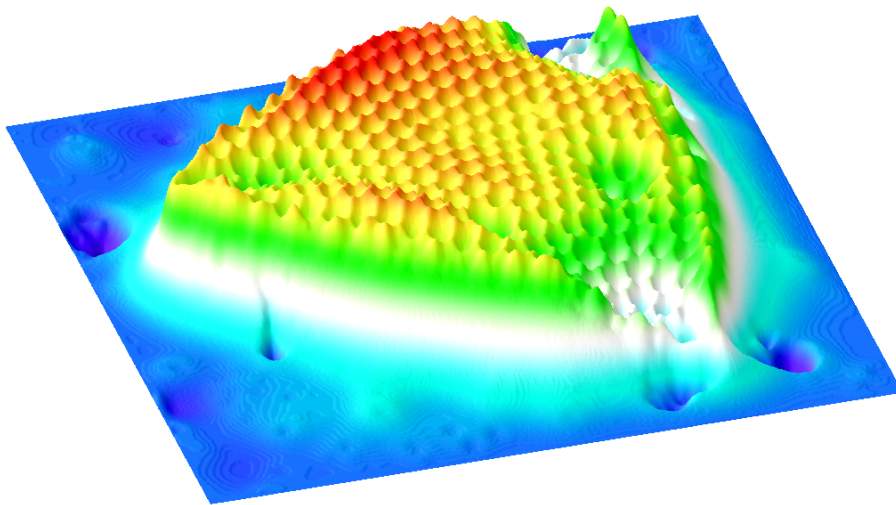


Abbildung 5.14: Falschfarben 3D-Darstellung der Diatomee aus 5.13(c).

## 5.2 Komplexe Wellenfeldmanipulation

Wie bereits in den einleitenden Worten zu dieser Arbeit erläutert, ist zur *vollständigen Beschreibung eines Wellenfeldes die Kenntnis der Amplituden- und Phasenverteilung unabdingbar*. Sind diese beiden Größen bekannt, kann mit Hilfe der skalaren Beugungstheorie der Zustand der Welle in jedem Raumpunkt berechnet werden [16]. Dies eröffnet mannigfaltige Möglichkeiten zur komplexen Wellenfeldmanipulation, da mit Hilfe des in der Arbeit vorgestellten Verfahrens sowohl die Amplituden- als auch die Phasenverteilung eines Objektes zugänglich ist. In den folgenden Abschnitten soll eine kleine Auswahl an Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie durch Kenntnis der beiden Größen das Wellenfeld gezielt verändert werden kann. Hieraus ergeben sich zusätzliche Chancen, die untersuchten Objekte auf eine vielfältigere Weise zu charakterisieren und bestimmte Eigenschaften besser zu visualisieren.

### 5.2.1 Nachstellen mikroskopischer Kontrastierungsverfahren

Im Bereich der Mikroskopie stellt die Beobachtung reiner Phasenobjekte und damit transparenter Proben seit jeher ein Problem dar [179]. Da transparente Objekte im Falle einer fokussierten Abbildung keinerlei Kontrast im Bild zeigen, wurden in den letzten Jahrzehnten verschiedenste mikroskopische Kontrastierungsverfahren entwickelt, um diesem Missstand Abhilfe zu schaffen. Zu den bekanntesten Verfahren gehören unter anderem Dunkelfeld [31], Phasenkontrast nach Zernike [112, 113] und differentieller Interferenzkontrast (DIK) [31]. Außerdem kann ganz allgemein zur quantitativen Bewertung von transparenten oder reflektiven Proben die Interferenzmikroskopie (IFM) [31] eingesetzt werden. Die beiden letztgenannten Verfahren, der DIK und die IFM, sollen im Weiteren beispielhaft herangezogen werden, um aufzuzeigen, wie unter Kenntnis der Amplituden- und Phasenverteilung diese Verfahren rein numerisch am Computer umgesetzt werden können.



### Interferenzmikroskopie (IFM)

Die IFM basiert selbstverständlich auf den Prinzipien der klassischen Interferometrie: Das Wellenfeld, dessen Phasenverteilung bestimmt werden soll, wird kohärent mit einer Referenzwelle bekannter Phasenverteilung überlagert. Aus dem resultierenden Interferogramm lässt sich anschließend der durch das Objekt verursachte optische Wegunterschied bestimmen. Wie auch in der klassischen Interferometrie liegen die Schwierigkeiten der IFM in den Anforderungen an den optischen Aufbau und die benötigten Lichtquellen. Da aber die Phasenverteilung des Objektes mit Hilfe des deterministischen Rekonstruktionsverfahrens bestimmt werden kann, liegt es nahe, diese zur Nachstellung der IFM heranzuziehen. Die Simulation basiert dabei nur auf der Grundgleichung der Interferometrie [54]. In Abbildung 5.15 sind zwei numerisch nachgestellte IFM-Aufnahmen der Mikrolinse aus Abschnitt 5.1.1 zu sehen. Als Eingangsdaten dienten dabei

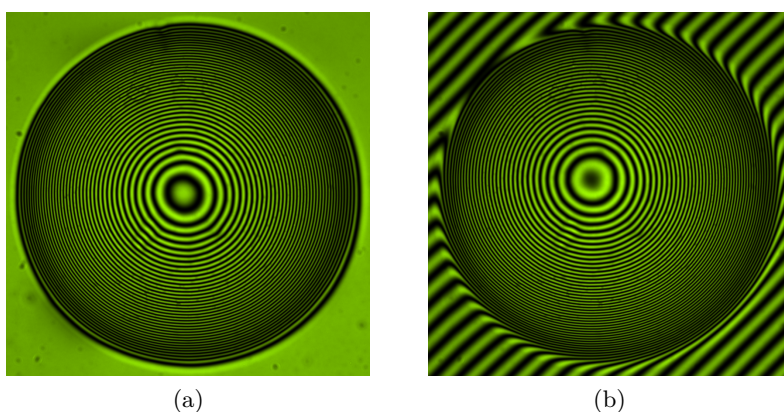


Abbildung 5.15: Simulierte Aufnahmen eines Interferenzmikroskopes: Abbildungen (a) und (b) zeigen zwei simulierte IFM-Aufnahmen. In (a) fällt die Referenzwelle unter  $\alpha = 0^\circ$  (zur Normalen der Grundebene) auf das Objekt, während in (b) eine Verkipfung der Referenzwelle um  $\alpha = 0,1^\circ$  und eine Beleuchtung unter  $\beta = 45^\circ$  eingestellt wurde.

lediglich die Intensitätsverteilung aus der Ebene  $z = 0$ , die nach Gleichung (4.5) bestimmt wurde, die Höhenverteilung aus Abbildung 5.7(d) und eine Wellenlänge  $\lambda = 550\text{nm}$ . Die Einstellungen des virtuellen Interferenzmikroskopes wurden dabei so gewählt, dass in Abbildung 5.15(a) die ebene Referenzwelle unter einem Winkel von  $\alpha = 0^\circ$  (zur Normalen der Grundebene) auf das Objekt trifft. Deshalb erscheinen die resultierenden Interferenzstreifen radial symmetrisch zum Zentrum des Objektes. Eine Verkipfung der ebenen Referenzwelle (zur Normalen der Grundebene) um  $\alpha = 0,1^\circ$  und eine Beleuchtung unter  $\beta = 45^\circ$  ergibt eine IFM-Aufnahme wie in Abbildung 5.15(b) gezeigt. In der Simulation wurde dabei berücksichtigt, dass die Probe ein Auflichtobjekt darstellt und dementsprechend mit einem Auflicht-Interferenzmikroskop untersucht werden müsste. Aus diesem Grund zeigt die künstliche IFM-Aufnahme die doppelte Streifenanzahl, was der Aufnahme einer realen Messung entspricht. Es scheint zunächst willkürlich, eine gemessene Höhenverteilung in ein Interferenzbild umzurechnen. Der Vorteil dieser Darstellung liegt aber darin, dass sich kleinste Abweichungen der rekonstruierten Verteilung von der radial

symmetrischen Form als Deformation der Interferenzstreifen zeigt. Somit können auch minimale Störungen einfach sichtbar gemacht werden. Dies zeigt sich sehr deutlich im direkten Vergleich der beiden Abbildungen 5.7(d) und 5.15(a). Die Informationen über Kratzer und Beschädigungen der Mikrolinse sind selbstverständlich in der rekonstruierten Höhenverteilung enthalten, aber mit Hilfe der künstlichen IFM-Aufnahme lassen sich diese weitaus besser erfassen.

### Differentieller Interferenzkontrast (DIK)

Der Bildeindruck beim DIK basiert auf der Erzeugung eines Reliefkontrastes, der durch eine laterale Bildaufspaltung erzeugt wird [31]. Die Bildaufspaltung sorgt dabei für die Interferenz des komplexen Wellenfeldes mit einer verschobenen Kopie ihrer selbst. Der sich daraus ergebende Interferenzkontrast zeigt demnach den Gradienten der Phasenverteilung, weshalb das Verfahren als differentieller Interferenzkontrast bezeichnet wird. Der DIK ermöglicht somit, die Phasenverteilung eines Objektes bzw. dessen Gradienten qualitativ zu beurteilen. Die mechanisch anspruchsvolle Bildaufspaltung birgt dabei mehrere Probleme. Zum einen kann die Bildaufspaltung nur in eine bestimmte Richtung erfolgen. Diese führt dazu, dass zur vollständigen Begutachtung der Probe diese unter verschiedenen Winkeln untersucht werden muss, um alle Richtungen des Phasengradienten zu erfassen. Demzufolge ist eine qualitative Analyse eines Objektes nur durch eine Vielzahl von Einzelaufnahmen möglich. Zum anderen wird durch die Bildaufspaltung neben der Phasen- auch die Amplitudenverteilung bei der Interferenz berücksichtigt, da sich die beiden Felder nicht entkoppeln lassen. Ziel des DIK-Mikroskop ist aber eine Aussage über den reinen Phasengradienten zu treffen, der aber aufgrund der technischen Gegebenheiten von Amplitudeninformationen beeinflusst wird. Hier zeigen sich die Vorteile des in der Arbeit vorgestellten Rekonstruktionsverfahrens: Die Amplituden- und Phasenverteilung eines Objektes liegen als separate Felder vor. Damit kann problemlos eine Entkopplung erzielt werden, wie es für eine ideale DIK-Aufnahme wünschenswert wäre. Zur Modellierung der Vorgänge in einem DIK-Mikroskop können unter anderem die Ansätze in [32, 33, 132] genutzt werden. Bei den Simulationen wurde lediglich die Phasenverteilung des Objektes berücksichtigt, um so eine möglichst optimale DIK-Aufnahme zu synthetisieren.

**Monochromatischer DIK** ergibt sich bei der Beleuchtung des Objektes mit einer monochromatischen Lichtquelle und folgt dem einführend beschriebenen Interferenzeffekt. Abbildung 5.16 zeigt zwei DIK-Aufnahmen der Erythrozyten aus Abschnitt 5.1.2 mit einer Richtung der Bildaufspaltung von  $45^\circ$ . In Abbildung 5.16(a) ist die Aufnahme eines tatsächlichen DIK-Mikroskopes zu sehen, während Abbildung 5.16(b) die simulierte DIK-Aufnahme zeigt. Bei der Simulation wurde nur die Höhenverteilung aus Abbildung 5.9(c) und eine Wellenlänge von  $\lambda = 550nm$  berücksichtigt. Der Vergleich der beiden Bilder in Abbildung 5.16 zeigt, dass der generelle Bildeindruck eines DIK-Mikroskopes auch am Computer nachgestellt werden kann. Es gilt allerdings anzumerken, dass die laterale Auflösung im Fall des simulierten Bildes 5.16(b) schlechter als die der realen DIK-Aufnahme ist. Der Grund hierin liegt vermutlich in der rekonstruierten Höhenverteilung der Erythrozyten, da diese die Basis für die künstliche DIK-Aufnahme darstellt. Die Höhenverteilung lässt sich unter Kenntnis zweier defokussierter Bilder [siehe Abbildungen 5.9(a) und 5.9(b)] rekonstruieren. Wie bereits in Abschnitt 2.4.3 erläutert, hat die Defokussistanz  $\Delta z$  Einfluss auf die Abbildungsleistung des optischen Systems, da sich bei Defokussierung



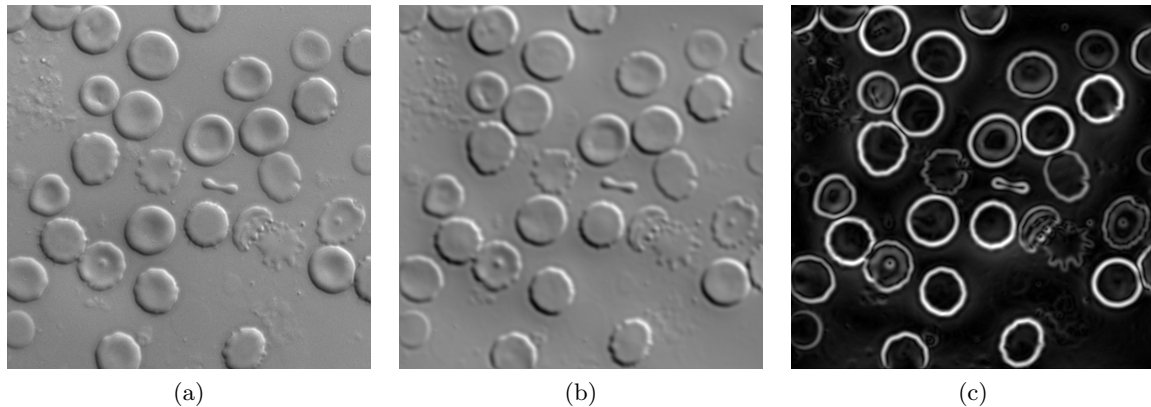


Abbildung 5.16: Simulierte Aufnahmen des differentiellen Interferenzkontrastes: Abbildungen (a) und (b) zeigen zwei DIK-Aufnahmen. In (a) ist die Aufnahme eines tatsächlichen DIK-Mikroskopes zu sehen, während in (b) die DIK-Aufnahme auf Basis der rekonstruierten Höhenverteilung aus Abbildung 5.9(c) simuliert wurde. Der Betrag des Phasengradienten ist in (c) dargestellt.

die OTF des Systems ändert. Unter Berücksichtigung dieses Aspektes ist es nicht zu erwarten, dass die aus der rekonstruierten Höhenverteilung synthetisierte DIK-Aufnahme die gleiche laterale Auflösung zeigt wie ein tatsächliches DIK-Bild. Wie bereits einleitend erwähnt, kann die Aufspaltungsrichtung eines DIK-Mikroskopes nicht frei gewählt werden. Deshalb ist eine Drehung der Proben auf dem Objektisch notwendig, um alle Richtungsgradienten zu erfassen. Unter Kenntnis der Phasen- bzw. Höhenverteilung eines Objektes kann aber rein mathematisch der Betrag des Phasengradienten berechnet werden. Somit können alle Richtungsgradienten und ihre Größe auf einmal bestimmt werden. Abbildung 5.16(c) zeigt eine solche Darstellung, welche mit einem tatsächlichen DIK-Mikroskop nicht realisierbar wäre. Die Helligkeit kodiert dabei den Betrag des Phasengradienten, was eine einfache Bewertung der Steilheit eines Objektes in allen Raumrichtungen ermöglicht.

**Echtfarben DIK** ist ein Effekt, der sich einstellt, wenn die Probe nicht mit monochromatischem Licht sondern mit einer Weißlichtquelle beleuchtet wird. Der Effekt des Echtfarben DIK basiert dabei auf dem Prinzip der Weißlichtinterferenz [135]. Der Kontrast, der sich im Falle des monochromatischen DIK einstellt, wird bei Beleuchtung mit einem breiten Frequenzspektrum in typische Interferenzfarben übersetzt [135]. Deshalb zeigen Aufnahmen eines Echtfarben DIK-Mikroskopes das Objekt von farbigen Streifen überlagert, wobei jeder Farbstreifen einer definierten optischen Weglänge entspricht. Beispielhaft sind in Abbildung 5.17 zwei simulierte Echtfarben DIK-Aufnahmen der Mikrolinse aus Abschnitt 5.1.1 zu sehen. Zur Berechnung der Bilder wurde wiederum nur die rekonstruierte Phasenverteilung der Mikrolinse aus Abbildung 5.7(d) verwendet. Für die Lichtquelle wurde ein gleichverteiltes Wellenlängenintervall von  $[380; 780] \text{ nm}$  angesetzt. Abbildung 5.17(a) zeigt eine Echtfarben DIK-Aufnahme mit einer Richtung der Bildaufspaltung von  $45^\circ$ , während in 5.17(b) eine Richtung von  $90^\circ$  gewählt wurde. Um

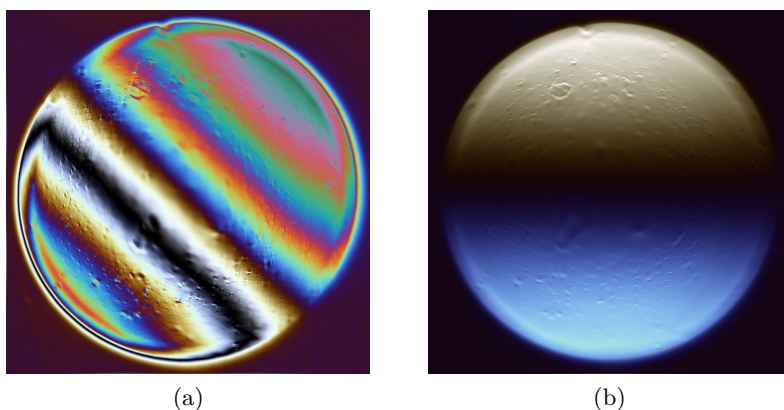


Abbildung 5.17: Simulierte Aufnahmen des Echtfarben differentiellen Interferenzkontrastes: Abbildungen (a) und (b) zeigen zwei simulierte Echtfarben DIK-Aufnahmen. Die Richtung der Bildaufspaltung wurde in (a) mit  $45^\circ$  und in (b) mit  $90^\circ$  gewählt. Die Höhe der Mikrolinse wurde in beiden Fällen willkürlich skaliert, um möglichst intensive Farbkontraste zu erzielen.

zu demonstrieren, was mit dieser Methode möglich ist, wurden unterschiedliche Farbeindrücke generiert, indem die Höhe der Mikrolinse willkürlich verändert wurde. Aufgrund der Streifenanzahl und der entstandenen Interferenzfarben ist eindeutig, dass die Höhe der Mikrolinse in Abbildung 5.17(a) deutlich größer skaliert wurde als in 5.17(b). Im Vergleich zum IFM können mit diesem Verfahren Fehlstellen auf dem Objekt noch besser sichtbar gemacht werden. Es stellt sich ein Reliefkontrast ein, der durch die Interferenzfarben zusätzlich verstärkt wird und jede Abweichung von einer glatten Oberfläche hervorhebt, wie es sich in den beiden Bildern sehr anschaulich zeigt.

### 5.2.2 Propagation eines Wellenfeldes

Aus den Abschnitten 2.2 und 3.1.1 ist hinreichend bekannt, dass unter Kenntnis der Amplituden- und Phasenverteilung eines Wellenfeldes das Feld in jeder Entfernung  $z$  berechnet werden kann. Dies bildet die Grundlage verschiedenster holographischer Verfahren [2, 3]. Der selbe Aspekt kann auch im Fall der deterministischen Phasenrekonstruktion ausgenutzt werden, da alle notwendigen Eingangsdaten vorhanden sind. Diese Aussage soll anhand der Mundschleimhautzelle aus Abschnitt 5.1.2 überprüft werden, indem die komplexe Feldverteilung der Zelle mit Hilfe der bereits eingeführten CVM von der Ebene  $z = +2,5\mu\text{m}$  nach  $z = -2,5\mu\text{m}$  propagiert werden soll. Durch einen Vergleich der tatsächlichen mikroskopischen Aufnahme aus der Ebene  $z = -2,5\mu\text{m}$  mit der durch Propagation berechneten Intensitätsverteilung  $\hat{I}_-(\mathbf{r})$  kann das Ergebnis abschließend beurteilt werden. Als Parameter der Simulation dienen dabei die Intensitätsverteilung  $I_+(\mathbf{r})$  und die unter Dirichlet-Randbedingungen rekonstruierte Phasenverteilung  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$  der Schleimhautzelle, welche in den Abbildungen 5.18(a) und 5.18(c) zu sehen sind. Es gilt aber im Folgenden zu beachten, dass die beiden Eingangsdaten für die Wellenfeldpropagation,  $\Phi_{z=0}(\mathbf{r})$  und  $I_+(\mathbf{r})$ , aus zwei unterschiedlichen Ebenen stammen. Die rekonstruierte Phasenverteilung des

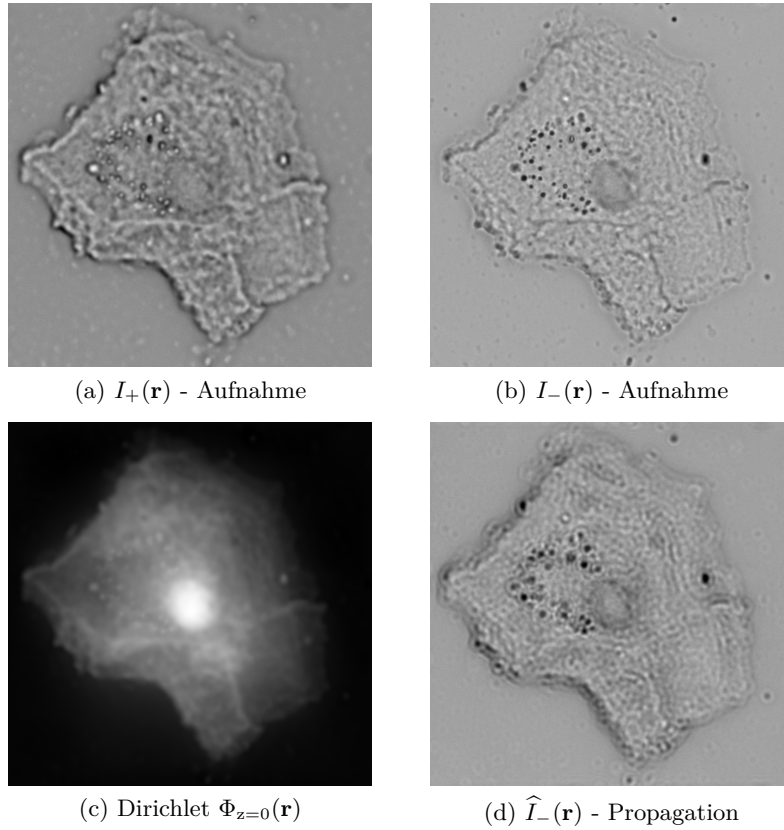


Abbildung 5.18: Numerische Wellenfeldpropagation der Mundschleimhautzelle: Abbildungen (a) und (b) zeigen die zwei Aufnahmen der Mundschleimhautzelle aus den Ebenen  $z = \pm 2,5 \mu\text{m}$ . In (c) ist die unter Dirichlet-Randbedingungen rekonstruierte Phasenverteilung zu sehen. Die durch Propagation mit der CVM erhaltenen Intensitätsverteilung  $\hat{I}_-(\mathbf{r})$  aus der Ebene  $z = -2,5 \mu\text{m}$  ist in (d) dargestellt.

Objektes wurde in der Ebene  $z = 0$  bestimmt, wohingegen die Intensitätsverteilung in der Ebene  $z = +2,5 \mu\text{m}$  aufgenommen wurde. Demzufolge muss zuerst die Phasenverteilung des Objektes in der Ebene  $z = +2,5 \mu\text{m}$  berechnet werden, um das komplexe Wellenfeld anschließend nach  $z = -2,5 \mu\text{m}$  propagieren zu können. Unter der Annahme, dass das optische System keinerlei Aberrationen aufweist und dass die Intensitätsverteilung  $I_{z=0}(\mathbf{r})$  konstant ist, ergibt sich die Phasenverteilung  $\Phi_+(\mathbf{r})$  in der Ebene  $z = +2,5 \mu\text{m}$  durch Propagation des Feldes von  $z = 0$  nach  $z = +2,5 \mu\text{m}$ . Eine Kombination dieser Phasenverteilung  $\Phi_+(\mathbf{r})$  mit der aufgenommenen Intensitätsverteilung  $I_+(\mathbf{r})$  stellt die zur Propagation notwendige komplexe Feldverteilung dar. Die berechnete Intensitätsverteilung  $\hat{I}_-(\mathbf{r})$  ergibt sich demnach durch Propagation des komplexen Feldes von der Ebene  $z = +2,5 \mu\text{m}$  um  $\Delta z = -5 \mu\text{m}$  nach  $z = -2,5 \mu\text{m}$ . Die mit der CVM propagierte Verteilung  $\hat{I}_-(\mathbf{r})$  zeigt Abbildung 5.18(d), und die tatsächliche Aufnahme aus der Entfernung  $z = -2,5 \mu\text{m}$  ist in 5.18(b) abgebildet. Ein Vergleich der beiden Bilder erfolgt am besten anhand einiger markanter Stellen. Dazu eignen sich besonders die dunklen Punkte

geringer Intensität. Deutlich zu sehen ist, dass die Verteilung der dunklen Punkte in 5.18(d) derer in 5.18(b) nahezu gleicht. Außerdem ist die Helligkeit der Punkte im Vergleich zur Intensitätsverteilung  $I_+(\mathbf{r})$  invertiert, wie es auch im tatsächlichen Bild 5.18(b) zu sehen ist. Es gilt allerdings anzumerken, dass das berechnete Bild  $\hat{I}_-(\mathbf{r})$  unschärfer wirkt und weniger Details der Mundschleimhautzelle zeigt. Dies ist vermutlich der rekonstruierten Phasenverteilung geschuldet, da aufgrund der Defokussierung hohe Ortsfrequenzen innerhalb der Phasenverteilung nur beschränkt wiedergegeben werden können (siehe Abschnitt 2.4.3). Dessen ungeachtet zeigt dieses Beispiel, dass die Informationen, die mit dem deterministischen Rekonstruktionsverfahren gewonnen werden, hinreichend sind, um eine Wellenfeldpropagation durchzuführen.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein verallgemeinertes deterministisches Verfahren zur Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen vorgestellt. Das Verfahren benötigt zur Rekonstruktion der Phasenverteilung eines zu untersuchenden komplexen Wellenfeldes lediglich Intensitätsaufnahmen des Feldes aus unterschiedlichen Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Aufgrund der Verwendung Greenscher Funktionen innerhalb der Rekonstruktionsgleichung kann das Verfahren, wie in Abschnitt 2.3 ausführlich gezeigt, spezifische Randbedingungen des Objektes bei der Rekonstruktion berücksichtigen. Hierunter fallen sowohl Dirichlet-, Neumann- und gemischte Randbedingungen, als auch die des unbegrenzten freien Raumes. Dies stellt ein Alleinstellungsmerkmal der vorgestellten Technik im Vergleich zu anderen deterministischen *phase retrieval* Methoden dar. Die Herleitung des Rekonstruktionsverfahren mit Hilfe Greenscher Funktionen unterliegt dabei verschiedenen Näherungen und Bedingungen. Diese hatten experimentelle Einschränkungen zur Folge, welche in Abschnitt 2.4 behandelt wurden.

Um die Fähigkeiten des Rekonstruktionsverfahren aufzuzeigen, wurden im Abschnitt 3.2 Simulationen mit künstlichen Objekten vorgenommen, welche zum Teil explizit die experimentellen Einschränkungen aus Abschnitt 2.4 verletzen. Somit konnte die Gültigkeit des Verfahrens zur Bestimmung der Phasenverteilung aus reinen Intensitätsmessungen auch unter schwierigen Bedingungen verifiziert werden. Durch eine in Abschnitt 3.2.4 vorgenommene Beurteilung der Ergebnisse mit Fehlerabschätzung konnte dies auch quantitativ bestätigt werden.

Wie das vorgestellte Verfahren im Rahmen eines Experimentes umgesetzt werden kann, wurde ausführlich in Kapitel 4 erläutert. Um das System optisch hochwertig und dabei möglichst flexibel umzusetzen, bot sich die Realisierung an einem Mikroskop an. Im Rahmen der Arbeit konnten zwei verschiedene experimentelle Aufbauten verwirklicht werden. In Abschnitt 4.2 wurde das sequentielle System für statische Proben sowie das Echtzeit-System für dynamische Prozesse vorgestellt. Durch den Einsatz schneller Algorithmen, welche die Leistung von parallelen Prozessoren ausnutzen, und durch die simultane Aufnahme der notwendigen Eingangsdaten mit Hilfe des Echtzeit-Systems ist es möglich, die Amplituden- und Phasenverteilung eines Wellenfeldes in Echtzeit zu bestimmen.

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass das in dieser Arbeit behandelte deterministische Rekonstruktionsverfahren zur Vermessung technischer und biologischer Proben sowohl im Auflicht als auch im Durchlicht geeignet ist. Im Fall technischer Proben konnten Vergleiche mit Herstellerangaben und Vergleichsmessungen die hohe Qualität des Lösungsverfahrens bestätigen. Trotz einer teilweisen Verletzung der experimentellen Einschränkungen (siehe Abschnitt 2.4), an welche die Herleitung des Verfahrens gebunden ist, ist die Güte der rekonstruierten Verteilungen beachtlich. Darüber hinaus wurde in Abschnitt 5.2 aufgezeigt, welche weiteren Möglichkeiten sich durch Kenntnis der Amplituden- und Phasenverteilung eines Wellenfeldes ergeben. Durch gezielte Manipulation des komplexen Wellenfeldes konnten rein numerisch verschiedene mikrosko-

pische Kontrastierungsverfahren am Computer nachgestellt und das aufgezeichnete Wellenfeld in verschiedene Ebenen propagiert bzw. numerisch fokussiert werden.

### Vergleich mit dem Stand der Technik

Wie bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit erläutert wurde, stellt dieses Verfahren nur eine mögliche Lösung des *phase retrieval* Problems dar. Neben der weit verbreiteten Interferometrie sind auch iterative und einige wenige weitere deterministische Methoden bekannt. Aus diesem Grund soll im Folgenden kurz auf die entsprechenden Vor- und Nachteile der einzelnen Techniken im Vergleich zu dem hier vorgestellten Verfahren zur Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen eingegangen werden.

Die äußerst simplen experimentellen Aufbauten, welche in Abschnitt 4.2 vorgestellt wurden, sind mit Standardlaborausrüstung zu realisieren und machen das deterministische Verfahren deshalb besonders attraktiv. Des Weiteren ist zur Umsetzung dieses Verfahrens kein spezielles optisches System notwendig. Im Gegenteil, es lässt sich mit einfachsten Mitteln äußerst kostengünstig an herkömmliche Mikroskopie-Systeme adaptieren. Weitere Vorteile liegen in den geringen Anforderungen an die zeitliche und räumliche Kohärenz der Lichtquelle. Wie aus den experimentellen Ergebnissen bekannt (siehe Abschnitt 5.1), wurden Messungen mit kohärenten und auch inkohärenten Leuchtmitteln durchgeführt und in beiden Fällen hochwertige Phasenrekonstruktionen erzielt. Dies zeichnet das Verfahren besonders gegenüber interferometrischen Messmethoden aus, bei denen eine kohärente Quelle eine absolute Notwendigkeit darstellt [4, 180]. Die kohärente Beleuchtung bei der Interferometrie macht einen sehr stabilen optischen Aufbau erforderlich, der unempfindlich gegenüber Erschütterungen und Vibrationen sein muss [4]. Diese Forderung muss im Fall des hier vorgestellten Verfahrens weniger streng erfüllt werden und ermöglicht somit den Einsatz dieser Technik auch in rauer Industrieumgebung [42]. Darüber hinaus wird durch die Verwendung inkohärenter Quellen der störende Einfluss von Speckle auf die Messung verhindert [2, 3]. Da beim Einsatz interferometrischer Techniken die Phasenverteilung eines Objektes im resultierenden Interferogramm gespeichert ist, gilt es zu beachten, dass zusätzliche Methoden, wie beispielsweise das räumliche oder zeitliche Phasenschieben, notwendig sind, um aus dem Interferogramm die eigentliche Information über die Phasenverteilung zu extrahieren [2]. Außerdem ist bei den meisten interferometrischen Messungen eine anschließende Phasendemodulation des Ergebnisses erforderlich, um eine kontinuierliche Phasenverteilung des Objektes zu erhalten. Die Demodulation ist aber, je nach Qualität der modulierten Phasenverteilung, mit einem massiven numerischen Aufwand verbunden [57–65].

Die iterativen *phase retrieval* Techniken zeichnen sich, wie das hier vorgestellte deterministische Verfahren, durch ihre simplen Eingangsdaten aus. Die Probleme mangelnder Eindeutigkeit und Konvergenz dieser Verfahren konnten, wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, durch eine höhere Anzahl von Eingangsdaten minimiert werden, wobei der große Nachteil langer Rechenzeiten aufgrund des iterativen Charakters erhalten bleibt [7–15, 17–23]. Ein Vorteil der iterativen Techniken liegt in der Unempfindlichkeit gegenüber verrauschten Eingangsdaten. Im Vergleich zu anderen *phase retrieval* Methoden liefern sie in diesen Fällen daher oft bessere Ergebnisse [46]. Es gilt aber auch für die iterativen Techniken, dass die ermittelte Phasenverteilung anschließend einer Phasendemodulation zu unterziehen ist, um eine kontinuierliche Phasenverteilung zu erhalten.

---

Die in Abschnitt 2.3.3 eingeführte *transport-of-intensity equation* (TIE) stellt eines der bekanntesten Verfahren zur deterministischen Phasenrekonstruktion dar. Wie bereits in der Einleitung angeführt, lässt sich die TIE einfach formulieren. Die Lösung dieser Gleichung im Rahmen eines geschickten und schnellen Algorithmus stellt sich hingegen als äußerst schwierig dar [40].

Die von Paganin und Nugent [43–45] vorgeschlagene und weit verbreitete Lösung der TIE entspricht der von Teague gemachten Annahme des unbegrenzten freien Raumes [41], welche bereits ausführlich in Abschnitt 2.3.3 behandelt wurde. Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass die von Paganin und Nugent vorgeschlagene Lösung der TIE auf Basis von zweidimensionalen Fourier-Transformationen als Spezialfall in dem hier vorgestellten deterministischen Verfahren mit Hilfe Greenscher Funktionen enthalten ist. Durch die Verwendung Greenscher Funktionen bei der Rekonstruktion der Phasenverteilung ergibt sich die Möglichkeit, gezielt objektspezifische Randbedingungen in die Lösung mit einzubringen und dadurch die Qualität der Rekonstruktion deutlich zu verbessern. Diese Tatsache spricht eindeutig für das vorgestellte deterministische Verfahren.

Jedoch soll neben den Vorteilen auch auf die Einschränkungen des Verfahrens eingegangen werden. Besonders die Bedingung der homogenen Intensitätsverteilung, welche in Abschnitt 2.4.2 eingeführt wurde, kann unter Umständen zu Vorbehalten gegenüber dem Verfahren führen. Im Rahmen der Simulationen aus Abschnitt 3.2.3 konnte dagegen gezeigt werden, dass das Verfahren unter Umständen in der Lage ist, Wellenfelder mit nicht konstanter Intensitätsverteilung mit guter Qualität zu rekonstruieren. Das Messergebnis der Diatomee aus Abschnitt 5.1.2 zeigt hingegen an Stellen hoher Absorption deutliche Verzerrungen der rekonstruierten Phasenverteilung. Weiterhin wird, aufgrund der Bedingung der homogenen Intensitätsverteilung nach den Gleichungen (2.23) und (2.24) davon ausgegangen, dass das zu untersuchende Wellenfeld keinerlei rotierende Anteile in der Phasenverteilung aufweist. Das Verfahren ist demnach nicht in der Lage, Wirbel in der Phasenverteilung zu rekonstruieren, auch wenn diese tatsächlich im Wellenfeld vorhanden sein sollten [46, 181]. Eine weitere Einschränkung des vorgestellten deterministischen Verfahrens ergibt sich durch die notwendigen Eingangsdaten. Die Intensitätsverteilungen aus unterschiedlichen Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung können als defokussierte Aufnahmen des zu untersuchenden Objektes interpretiert werden. Wie bereits in Abschnitt 2.4.3 erläutert, wirkt sich eine Defokussierung merklich auf die optische Transferfunktion (OTF) eines optischen Systems aus. Im Falle der hier entwickelten *phase retrieval* Technik ist demzufolge die Rekonstruktion feiner Strukturen innerhalb der Phasenverteilung von der OTF und demnach von der entsprechenden Defokussierung abhängig. Dies ist recht gut am Beispiel der in Abschnitt 5.2.2 propagierten Zelle der menschlichen Mundschleimhaut zu sehen. Während die zum Vergleich herangezogenen markanten Stellen in der berechneten Verteilung  $\hat{I}_-(\mathbf{r})$  und der tatsächlich gemessenen Verteilung  $I_-(\mathbf{r})$  nahezu gleich sind, wirkt die propagierte Verteilung wesentlich unschärfer. Die Defokussierung, welche notwendig ist, um die Eingangsdaten zu gewinnen, beschränkt die Wiedergabe von hohen Ortsfrequenzen und damit feinen Strukturen innerhalb der Phasenverteilung. In einigen Fällen kann demzufolge die Rekonstruktion von Objektdetails nicht mit der Qualität von zum Beispiel Konfokalmikroskopen verglichen werden. Allerdings ist das deterministische Verfahren aufgrund der geschickten optischen Aufbauten und der schnellen Algorithmen, welche auf Grafikkarten gelöst werden, in der Lage, die Phasenverteilung eines Objektes in Echtzeit zu rekonstruieren. Andere *phase retrieval* Techniken, welche die

Messung der Phasenverteilung eines Objektes in Echtzeit ermöglichen, basieren weitgehend auf interferometrischen Prinzipien [180,182] und zeigen daher die bereits angesprochenen Nachteile.

### Ausblick

Anhand der in der Arbeit gewonnen Erkenntnisse lassen sich für zukünftige Arbeiten weitere Fragestellungen formulieren. Am bedeutendsten ist wohl, wie sich die Annahmen, welche im Verlauf der Herleitung zum Rekonstruktionsverfahren getroffen werden mussten und welche zu experimentellen Einschränkungen führen (siehe Abschnitt 2.4), tatsächlich auf die Qualität der vorgestellten *phase retrieval* Technik auswirken. Erste diesbezügliche Ansätze wurden bereits in dieser Arbeit verfolgt, indem die Auswirkungen absorbierender Objekte im Rahmen von Simulationen und realen Experimenten untersucht wurden. Gerade Simulationen bietet hierbei die Möglichkeit einer systematischen Überprüfung des Verfahrens in Hinblick auf den Gradienten der Intensitätsverteilung  $\nabla_T I_z(\mathbf{r})$  bzw. dessen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis. Ferner stellt, wie bereits mehrfach erwähnt, die Defokussdistanz zwischen den einzelnen Intensitätsverteilungen einen entscheidenden Parameter innerhalb des Verfahrens dar. Zum einen beeinflusst die Distanz die Gültigkeit der mathematischen Näherung und damit die Herleitung der Gleichung, zum anderen wirkt sie sich unmittelbar auf die experimentellen Bedingungen aus, was ausführlich in Abschnitt 2.4.3 behandelt wurde. Es zeigt sich, dass die optimale Defokussdistanz in Abhängigkeit der Eigenschaften des optischen Systems und der höchsten im Objekt vorkommenden Ortsfrequenz ermittelt werden sollte. Einen anderen Ansatz stellen die Arbeiten von Kou et al. dar, bei denen die negative Auswirkung der Defokussierung auf die OTF eines Systems gezielt kompensiert werden kann [129,183]. Auch im Bereich der experimentellen Aufbauten sollten noch weitere Ansätze verfolgt werden. Im Rahmen der Arbeit wurde zwei verschiedenen Methoden realisiert: Das kostengünstigere, aber sequentielle System mit einer Kamera und das kostspieligere Echtzeit-System mit zwei Kameras. Von Interesse wäre es, ob sich der Einsatz eines Drei-Kamera-Systems positiv auf das Rekonstruktionsverfahren auswirkt bzw. ob sich die Rekonstruktion von kleinen Details innerhalb der Phasenverteilung dadurch steigern lässt. Allerdings könnte der Aufbau eines Drei-Kamera-Systems unter Umständen sowohl mechanisch als auch optisch schwierig zu realisieren sein. Aus diesem Grund sollten auch alternative experimentelle Aufbauten auf ihre Anwendbarkeit hin untersucht werden. Eine Möglichkeit sind dabei die bereits im Bereich der iterativen *phase retrieval* Techniken eingesetzten phasenschiebenden räumlichen Lichtmodulatoren [16–23]. Durch Adressierung einer geeigneten Phasenfunktion auf dem Modulator kann eine präzise elektronisch steuerbare Defokussierung in ein optisches System eingebracht werden. Die Intensitätsaufnahmen aus verschiedenen Ebenen, welche die notwendigen Eingangsdaten für den Algorithmus darstellen, würden dann zwar wiederum sequentiell aufgenommen werden, eine Bildrate der Modulatoren von 60 Hz [184] sollte dabei aber ausreichend sein, um Proben untersuchen zu können, welche sich nur wenig über die Zeit verändern. Zusätzlich kann mit den phasenschiebenden räumlichen Lichtmodulatoren nicht nur die Fokusslage kontrolliert verändert werden. Sie eignen sich darüber hinaus auch, um gezielt Wellenfront-Aberrationen in einem optischen System zu korrigieren [185,186]. Der Einsatz von phasenschiebenden räumlichen Lichtmodulatoren birgt somit einen Mehrwert, der mit anderen Konzepten nicht verwirklicht werden könnte. Zu guter Letzt sollten in zukünftigen Arbeiten



---

die in Abschnitt 5.2 vorgestellten numerischen Wellenfeldmanipulationen in eine Echtzeitlösung integriert werden. Zum momentanen Zeitpunkt werden diese Verfahren in einer externen Software berechnet. Durch die Zusammenführung der Wellenfeldmanipulation mit der Echtzeit *phase retrieval* Methode könnten verschiedene mikroskopische Kontrastierungsverfahren ohne entsprechende Mikroskope in Echtzeit umgesetzt werden. Auch Techniken wie das numerische Fokussieren, welche aus der digital holographischen Mikroskopie [180] bekannt sind, ließen sich problemlos integrieren.



# A Greensche Funktionen und Herleitungen zur Phasenrekonstruktion

In diesem Kapitel werden ausführlich alle Formulierungen und nötigen Gleichungen zur Herleitung der deterministischen Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen eingeführt. Neben der Greenschen Identität werden ebenfalls die grundlegenden Eigenschaften der Greenschen Funktionen vorgestellt. Anschließend wird das mathematische Modell zur deterministischen Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen im Detail hergeleitet.

## A.1 Greensche Identität und Greensche Funktion

Dieser Abschnitt soll die Greensche Identität und die Wirkungsweise und Konstruktion der Greenschen Funktion erläutern.

### A.1.1 Herleitung der ersten Greenschen Identität

Die erste Greensche Identität basiert auf dem Gaußschen Integralsatz.

#### Gaußscher Integralsatz

Der Satz von Gauß beschreibt den Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes und dem durch das Feld gegebenen Fluß [187]:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d^{n-1} x \quad (\text{A.1})$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$  der Normalenvektor auf  $\partial\Omega$ .

#### Erste Greensche Identität

Die erste Greensche Identität lässt sich aus dem Gaußschen Integralsatz herleiten. Es werden zwei Vektorfelder definiert

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \phi \nabla \varphi \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot \{\phi \nabla \varphi\} \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (A.1) ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \{\phi \nabla \varphi\} \, d^n x &= \oint_{\partial\Omega} \{\phi \nabla \varphi\} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d^{n-1} x \\ \int_{\Omega} \{\nabla \phi \cdot \nabla \varphi + \phi \nabla^2 \varphi\} \, d^n x &= \oint_{\partial\Omega} \phi \{\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}\} \, d^{n-1} x \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dies stellt die erste Greensche Identität dar [188].

### Erste Greensche Identität in zwei Dimensionen

Für die Betrachtung in zwei Dimensionen ergibt sich nach Gleichung (A.2)

$$\int_R \left\{ \nabla_{\mathbf{T}'} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{T}'} \varphi + \phi \nabla_{\mathbf{T}'}^2 \varphi \right\} \, d\mathbf{r}' = \oint_C \phi \{ \nabla_{\mathbf{T}'} \varphi \cdot \mathbf{n}_C \} \, d\mathbf{r}', \quad (\text{A.3})$$

mit  $\mathbf{r}' = (x', y')$ ,  $\phi = \phi(x', y')$ ,  $\varphi = \varphi(x', y')$  und  $\nabla_{\mathbf{T}'} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x' \\ \partial/\partial y' \end{pmatrix}$ .

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt zur Herleitung der deterministischen Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen.

### A.1.2 Grundlagen zur Greenschen Funktion

#### Eigenschaft der Greenschen Funktion

Gesucht wird die Lösung zur Gleichung:

$$\hat{L}(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') = q(\mathbf{r}')$$

Es sei  $\hat{L}$  ein linearer Differentialoperator,  $p$  die gesuchte und  $q$  eine bekannte Funktion. Symbolisch kann die Lösung in der Form

$$p(\mathbf{r}') = \hat{L}^{-1}(\mathbf{r}') q(\mathbf{r}')$$

dargestellt werden. Der Operator  $\hat{L}^{-1}$  ist der inverse Operator zu  $\hat{L}$ , wobei  $\hat{L}^{-1} \hat{L} = \hat{E}$  den Einheitsoperator  $\hat{E}$  bilden. Die Wirkung von  $\hat{L}^{-1}$  auf  $q$  soll wie folgt definiert werden:

$$\hat{L}^{-1}(\mathbf{r}') q(\mathbf{r}') = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

wobei  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  die Greensche Funktion zum Operator  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  darstellt. Die vorherige Gleichung wird von links mit  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  multipliziert:

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{r}') \hat{L}^{-1}(\mathbf{r}') q(\mathbf{r}') &= \hat{L}(\mathbf{r}') \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \\ q(\mathbf{r}') &= \int \left\{ \hat{L}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Dies ist nur erfüllt, wenn

$$\hat{L}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

und somit, wegen der siebenden Eigenschaft der Delta-Distribution [16]

$$q(\mathbf{r}') = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

Demzufolge kann die Wirkung des Operators  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  auf die Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  formuliert werden als [189]:

$$\hat{L}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{A.4})$$

### Anwendung der Greenschen Funktion

Ausgangspunkt ist wiederum die Gleichung

$$\hat{L}(\mathbf{r}')p(\mathbf{r}') = q(\mathbf{r}')$$

Aus Kenntnis der Greenschen Funktion

$$\hat{L}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

kann die Gleichung dargestellt werden als:

$$\hat{L}(\mathbf{r}')p(\mathbf{r}') = \int \left\{ \hat{L}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}.$$

Der Operator  $\hat{L}$  ist linear und wirkt nur auf die Variable  $\mathbf{r}'$ . Er ist somit unabhängig vom Integral und kann herausgezogen werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{r}')p(\mathbf{r}') &= \hat{L}(\mathbf{r}') \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \\ p(\mathbf{r}') &= \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Die Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  stellt die Impulsantwort zum linearen Differentialoperator  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  dar [189]. Die Schwierigkeit liegt darin, die richtige Greensche Funktion zum linearen Differentialoperator  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  zu finden, damit  $\hat{L}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  erfüllt ist.

### Konstruktion der Greenschen Funktion

Es ist nun die Frage, wie die Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  zum linearen Differentialoperator  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  gefunden werden kann.

Der Operator besitze die Eigenfunktionen  $\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}')$  wobei  $\hat{L}(\mathbf{r}')\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}') = \kappa_{m,n}\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}')$  und  $\kappa_{m,n}$  die Eigenwerte zu den Eigenfunktionen sind. Die Eigenfunktionen sollen die Vollständigkeitsre-

lation erfüllen, d.h.:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}) \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}') \quad (\text{A.5})$$

Es kann nun einfach gezeigt werden, dass [115]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}) \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}')}{\kappa_{m,n}} \quad (\text{A.6})$$

Gleichung (A.6) wird von links mit dem Operator  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  multipliziert:

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \hat{L}(\mathbf{r}') \left\{ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}) \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}')}{\kappa_{m,n}} \right\} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}) \hat{L}(\mathbf{r}') \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}')}{\kappa_{m,n}} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{m,n}(\mathbf{r}) \kappa_{m,n} \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}')}{\kappa_{m,n}} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}) \Gamma_{m,n}(\mathbf{r}') \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Somit ist die Vollständigkeitsrelation nach Gleichung (A.5) und die Definition der Greenschen Funktion nach Gleichung (A.4) erfüllt. Die Greensche Funktion lässt sich damit aus den Eigenfunktionen und Eigenwerten des Operators  $\hat{L}(\mathbf{r}')$  konstruieren.

## A.2 Herleitungen zur Phasenrekonstruktion mit Hilfe Greenscher Funktionen

### A.2.1 Phasenrekonstruktion und die erste Greensche Identität

Der Ansatzpunkt zur Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung mit Hilfe Greenscher Funktionen ist die erste Greensche Identität in zwei Dimensionen. Das Vorgehen beruht dabei auf einem von Fornaro et al. vorgestellten Verfahren [57]. Die erste Greensche Identität in zwei Dimensionen lautet nach Gleichung (A.3):

$$\int_R \left\{ \nabla_{\mathbf{T}'} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{T}'} \varphi + \phi \nabla_{\mathbf{T}'}^2 \varphi \right\} d\mathbf{r}' = \oint_C \phi \{ \nabla_{\mathbf{T}'} \varphi \cdot \mathbf{n}_C \} d\mathbf{r}'$$

Die Funktion  $\varphi$  soll einer Greenschen Funktion nach Gleichung (A.4) entsprechen. Es folgt:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}'}^2 \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Die Funktion  $\phi$  in Gleichung (A.3) stellt die gesuchte zweidimensionale Phasenverteilung in der Entfernung  $z$  dar. Sie wird im Weiteren mit  $\Phi_z$  bezeichnet.

$$\phi(\mathbf{r}') = \Phi_z(\mathbf{r}') \quad (\text{A.8})$$

Nach Einsetzen von Gleichung (A.7) und (A.8) in Gleichung (A.3) ergibt sich, aufgrund der siebenden Eigenschaft der Delta-Funktion [16]:

$$\int_R \left\{ \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi_z \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G + \Phi_z \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G \right\} d\mathbf{r}' = \oint_C \Phi_z \{ \nabla_{\mathbf{r}'} G \cdot \mathbf{n}_C \} d\mathbf{r}' \quad (\text{A.9})$$

$$\int_R \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi_z \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G \} d\mathbf{r}' + \Phi_z(\mathbf{r}) = \oint_C \Phi_z \{ \nabla_{\mathbf{r}'} G \cdot \mathbf{n}_C \} d\mathbf{r}' \quad (\text{A.10})$$

Umstellen nach  $\Phi_z(\mathbf{r})$  ergibt:

$$\Phi_z(\mathbf{r}) = - \int_R \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi_z \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G \} d\mathbf{r}' + \oint_C \Phi_z \{ \nabla_{\mathbf{r}'} G \cdot \mathbf{n}_C \} d\mathbf{r}' \quad (\text{A.11})$$

Das Integral über den Rand  $C$  der Fläche  $R$  kann vernachlässigt werden, wenn die Greensche Funktion Neumann- oder Dirichlet-Randbedingungen erfüllt oder die Fläche  $R$  keinen Rand  $C$  besitzt, da das Gebiet bis ins Unendliche ausgedehnt ist. Für den Fall des unbegrenzten freien Raumes ergibt sich die Greensche Funktion  $G_\infty$ . Wird diese angenommen, so lässt sich beispielhaft Gleichung (A.11) in die Form

$$\Phi_z(x, y) = - \iint_{-\infty}^{\infty} \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi_z(x', y') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_\infty(x, y, x', y') \} dx' dy' \quad (\text{A.12})$$

bringen.

### A.2.2 Eigenfunktionen der Helmholtz-Gleichung

Um die Lösung zur Rekonstruktion der Phasenverteilung mit Hilfe der Greenschen Funktion unter Beachtung von geeigneten Randbedingungen zu formulieren, muss nach Gleichung (A.9) die Greensche Funktion  $G$  zum transversalen Laplace-Operator  $\nabla_{\mathbf{r}'}^2$  gefunden werden. Innerhalb der rechteckigen Fläche  $R = a \times b$  muss demnach

$$\int_0^a \int_0^b \Phi_z(x', y') \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G(x, y, x', y') dx' dy' = \Phi_z(x, y) \quad (\text{A.13})$$

erfüllt sein [siehe Gleichung (A.9)]. Die Greensche Funktion eines Operators kann nach Gleichung (A.6) aus den Eigenfunktionen und Eigenwerten des Operators konstruiert werden. Ein

Verfahren zur Konstruktion einer Greenschen Funktion, welche die obige Gleichung erfüllt, wurde unter anderem von Lyuboshenko und Maitre vorgestellt [60, 62, 190]. Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des transversalen Laplace-Operators  $\nabla_T^2$  sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte der homogenen zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung in den kartesischen Koordinaten  $(x', y')$ :

$$\nabla_T^2 \Psi_{m,n} + \lambda_{m,n} \Psi_{m,n} = 0, \quad (\text{A.14})$$

mit den Eigenfunktionen  $\Psi_{m,n}$  und den entsprechenden Eigenwerten  $\lambda_{m,n}$ . Die Eigenfunktionen sind:

Dirichlet-Randbedingung

$$\Psi_{D,m,n} = a_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \quad (\text{A.15})$$

Neumann-Randbedingung

$$\Psi_{N,m,n} = a_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \quad (\text{A.16})$$

mit

$$a_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{ab}} & m \text{ und } n \neq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ab}} & m \text{ oder } n = 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

und den Eigenwerten

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (\text{A.18})$$

### A.2.3 Greensche Funktion und Eigenfunktionen der Helmholtz-Gleichung

Die Greensche Funktion kann nach Gleichung (A.6) aus den Eigenfunktionen des Operators erstellt werden:

$$G(x, y, x', y') = \sum_{\substack{m,n=0 \\ \lambda_{m,n} \neq 0}}^{\infty} \frac{\Psi_{m,n}(x, y) \Psi_{m,n}(x', y')}{\lambda_{m,n}} \quad (\text{A.19})$$

In der nun folgenden Betrachtung werden ausschließlich die Eigenfunktionen  $\Psi_{N,m,n}$  des Operators  $\nabla_T^2$  mit Neumann-Randbedingungen berücksichtigt. Die Greensche Funktion unter Neumann-



Randbedingungen ergibt sich zu

$$G_N(x, y, x', y') = \sum_{\substack{m, n=0 \\ \lambda_{m, n} \neq 0}}^{\infty} \frac{\Psi_{N, m, n}(x, y) \Psi_{N, m, n}(x', y')}{\lambda_{m, n}} \quad (\text{A.20})$$

$$= \sum_{\substack{m, n=0 \\ \lambda_{m, n} \neq 0}}^{\infty} a_{m, n}^2 \frac{\cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{m\pi}{a}x') \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{\lambda_{m, n}} \quad (\text{A.21})$$

Separieren der Fälle ( $m \neq 0$  und  $n = 0$ ), ( $m = 0$  und  $n \neq 0$ ) und ( $m, n \neq 0$ ) führt auf

$$\begin{aligned} G_N^{(1)}(x, y, x', y') &= \frac{2a^2}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x')}{m^2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{2b^2}{\pi^2 ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{n^2}}_{A_1^{(1)}} \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x') \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{(m/a)^2 + (n/b)^2}}_{A_2^{(1)}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

bzw.

$$\begin{aligned} G_N^{(2)}(x, y, x', y') &= \underbrace{\frac{2a^2}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x')}{m^2}}_{A_1^{(2)}} \\ &\quad + \frac{2b^2}{\pi^2 ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{n^2} \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2 ab} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x')}{(m/a)^2 + (n/b)^2}}_{A_2^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y') \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Es folgt nun eine genauere Untersuchung von  $A_1^{(1)}$ :

$$A_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{n^2} \quad (\text{A.24})$$

Mit  $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$  ergibt sich [191]

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}[y - y'])}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}[y + y'])}{n^2} \right\} \quad (\text{A.25})$$

Unter Verwendung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = \frac{1}{4}(\theta - \pi)^2 - \frac{1}{12}\pi^2, \quad \text{wobei } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad [\text{192}] \quad (\text{A.26})$$

und anschließendem Einsetzen von Gleichung (A.26) in Gleichung (A.25), folgt

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{b} [y - y'] - \pi \right)^2 - \frac{1}{12} \pi^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{b} [y + y'] - \pi \right)^2 - \frac{1}{12} \pi^2 \right\}, \quad \text{für } y > y' \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{b} [y' - y] - \pi \right)^2 - \frac{1}{12} \pi^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{b} [y' + y] - \pi \right)^2 - \frac{1}{12} \pi^2 \right\}, \quad \text{für } y < y' \end{aligned}$$

$$A_1^{(1)} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12b^2} \{3y'^2 + 3(y - b)^2 - b^2\}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\pi^2}{12b^2} \{3y^2 + 3(y' - b)^2 - b^2\}, & \text{für } y < y' \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Für den Teil  $A_1^{(2)}$  lässt sich bei gleicher Vorgehensweise

$$A_1^{(2)} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12a^2} \{3x'^2 + 3(x - a)^2 - a^2\}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\pi^2}{12a^2} \{3x^2 + 3(x' - a)^2 - a^2\}, & \text{für } x < x' \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

zeigen.

Nun soll  $A_2^{(1)}$  genauer betrachtet werden:

$$A_2^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{(m/a)^2 + (n/b)^2} \quad (\text{A.30})$$

$$= b^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{n^2 + (\frac{b}{a}m)^2} \quad (\text{A.31})$$

Mit  $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$  ergibt sich [191]

$$A_2^{(1)} = \frac{b^2}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b} [y - y'])}{n^2 + (\frac{b}{a}m)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b} [y + y'])}{n^2 + (\frac{b}{a}m)^2} \right\} \quad (\text{A.32})$$

Unter Verwendung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2 + l^2} = \frac{\pi}{2l} \frac{\cosh(l[\pi - \theta])}{\sinh(l\pi)} - \frac{1}{2l^2}, \quad \text{wobei } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad [192] \quad (\text{A.33})$$

und anschließendem Einsetzen von Gleichung (A.33) in Gleichung (A.32), folgt

$$A_2^{(1)} = \frac{b^2}{2} \left\{ \frac{\pi a}{2bm \sinh(\pi \frac{b}{a}m)} \left\{ \cosh\left(\frac{b}{a}m\left[\pi - \frac{\pi}{b}(y - y')\right]\right) + \cosh\left(\frac{b}{a}m\left[\pi - \frac{\pi}{b}(y + y')\right]\right) \right\} - \frac{a^2}{b^2m^2} \right\}, \quad \text{für } y > y' \quad (\text{A.34})$$

$$A_2^{(1)} = \frac{b^2}{2} \left\{ \frac{\pi a}{2bm \sinh(\pi \frac{b}{a}m)} \left\{ \cosh\left(\frac{b}{a}m\left[\pi - \frac{\pi}{b}(y' - y)\right]\right) + \cosh\left(\frac{b}{a}m\left[\pi - \frac{\pi}{b}(y' + y)\right]\right) \right\} - \frac{a^2}{b^2m^2} \right\}, \quad \text{für } y < y' \quad (\text{A.35})$$

Mit  $\cosh(\alpha) + \cosh(\beta) = 2 \left\{ \cosh(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cosh(\frac{\alpha-\beta}{2}) \right\}$  [193] ergibt sich

$$A_2^{(1)} = \begin{cases} \frac{\pi ab}{2m} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y]) \cosh(\frac{\pi m}{a}y')}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)} \right\} - \frac{a^2}{2m^2}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\pi ab}{2m} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y']) \cosh(\frac{\pi m}{a}y)}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)} \right\} - \frac{a^2}{2m^2}, & \text{für } y < y' \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Für den Teil  $A_2^{(2)}$  gilt bei gleicher Vorgehensweise

$$A_2^{(2)} = \begin{cases} \frac{\pi ab}{2n} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x]) \cosh(\frac{\pi n}{b}x')}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)} \right\} - \frac{b^2}{2n^2}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\pi ab}{2n} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x']) \cosh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)} \right\} - \frac{b^2}{2n^2}, & \text{für } x < x' \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Die beiden Ausdrücke  $G_N^{(1)}(x, y, x', y')$  und  $G_N^{(2)}(x, y, x', y')$  für die Greensche Funktion mit Neumann-Randbedingungen ergeben sich durch Einsetzen von  $A_1^{(1)}$  und  $A_2^{(1)}$  in Gleichung (A.22)

und  $A_1^{(2)}$  und  $A_2^{(2)}$  in Gleichung (A.23):

$$\begin{aligned}
 G_N^{(1)}(x, y, x', y') = & \frac{2a^2}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x')}{m^2} \\
 & + \frac{2b^2}{\pi^2 ab} \begin{cases} \frac{\pi^2}{12b^2} \{3y'^2 + 3(y-b)^2 - b^2\}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\pi^2}{12b^2} \{3y^2 + 3(y'-b)^2 - b^2\}, & \text{für } y < y' \end{cases} \\
 & + \frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x')
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \begin{cases} \frac{\pi ab}{2m} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y]) \cosh(\frac{\pi m}{a}y')}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)} \right\} - \frac{a^2}{2m^2}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\pi ab}{2m} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y']) \cosh(\frac{\pi m}{a}y)}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)} \right\} - \frac{a^2}{2m^2}, & \text{für } y < y' \end{cases} \\
 = & \frac{1}{6ab} \begin{cases} \{3y'^2 + 3(y-b)^2 - b^2\}, & \text{für } y > y' \\ \{3y^2 + 3(y'-b)^2 - b^2\}, & \text{für } y < y' \end{cases} \\
 & + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{a}x')}{m}
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\cdot \begin{cases} \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y]) \cosh(\frac{\pi m}{a}y')}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y']) \cosh(\frac{\pi m}{a}y)}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)}, & \text{für } y < y' \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
G_N^{(2)}(x, y, x', y') = & \frac{2a^2}{\pi^2 ab} \begin{cases} \frac{\pi^2}{12a^2} \{3x'^2 + 3(x-a)^2 - a^2\}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\pi^2}{12a^2} \{3x^2 + 3(x'-a)^2 - a^2\}, & \text{für } x < x' \end{cases} \\
& + \frac{2b^2}{\pi^2 ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{n^2} \\
& + \frac{4}{\pi^2 ab} \begin{cases} \frac{\pi ab}{2n} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x]) \cosh(\frac{\pi n}{b}x')}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)} \right\} - \frac{b^2}{2n^2}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\pi ab}{2n} \left\{ \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x']) \cosh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)} \right\} - \frac{b^2}{2n^2}, & \text{für } x < x' \end{cases} \quad (A.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y') \\
= & \frac{1}{6ab} \begin{cases} \{3x'^2 + 3(x-a)^2 - a^2\}, & \text{für } x > x' \\ \{3x^2 + 3(x'-a)^2 - a^2\}, & \text{für } x < x' \end{cases} \\
& + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{b}y) \cos(\frac{n\pi}{b}y')}{n} \quad (A.41) \\
& \cdot \begin{cases} \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x]) \cosh(\frac{\pi n}{b}x')}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x']) \cosh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)}, & \text{für } x < x' \end{cases}
\end{aligned}$$

#### A.2.4 Richtungsableitungen der Greenschen Funktion

Die Greenschen Funktionen zum transversalen Laplace-Operator unter Neumann-Randbedingungen sind mit den obigen Gleichungen (A.39) und (A.41) gefunden. Zur Lösung von Gleichung (A.9) werden aber auch die Richtungsableitungen der Greenschen Funktion  $\nabla_{T'} G$  benötigt. Diese sollen im Folgenden berechnet werden. Um möglichst einfache Formulierungen für die Ableitungen zu erhalten, wird Gleichung (A.39) nach  $x'$  und Gleichung (A.41) nach  $y'$  differenziert. Es

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial_{x'}} G_N^{(1)}(x, y, x', y') &= G_N^{x'}(x, y, x', y') \\
 &= -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \\
 &\quad \cdot \underbrace{\begin{cases} \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y]) \cosh(\frac{\pi m}{a}y')}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\cosh(\frac{\pi m}{a}[b-y']) \cosh(\frac{\pi m}{a}y)}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)}, & \text{für } y < y' \end{cases}}_{g_N(m, y, y')}
 \end{aligned} \tag{A.42}$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial_y} G_N^{(2)}(x, y, x', y') &= G_N^{y'}(x, y, x', y') \\
 &= -\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \\
 &\quad \cdot \underbrace{\begin{cases} \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x]) \cosh(\frac{\pi n}{b}x')}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}[a-x']) \cosh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)}, & \text{für } x < x' \end{cases}}_{g_N(n, x, x')}
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

Werden in Gleichung (A.21) nicht Neumann- sondern Dirichlet-Randbedingungen angesetzt, d.h. Eigenfunktionen, die durch Sinus-Funktionen beschrieben sind, so ergibt sich nach analoger Rechnung (mit entsprechenden Umformungen), wie für die Greensche Funktion unter Neumann-Randbedingungen gezeigt, die Richtungsableitungen  $G_D^{x'}$  und  $G_D^{y'}$  der Greenschen Funktion  $G_D(x, y, x', y')$  unter Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 G_D^{x'}(x, y, x', y') &= \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \\
 &\quad \cdot \underbrace{\begin{cases} \frac{\sinh(\frac{\pi m}{a}[b-y]) \sinh(\frac{\pi m}{a}y')}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)}, & \text{für } y > y' \\ \frac{\sinh(\frac{\pi m}{a}[b-y']) \sinh(\frac{\pi m}{a}y)}{\sinh(\pi \frac{b}{a}m)}, & \text{für } y < y' \end{cases}}_{g_D(m, y, y')}
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

und

$$G_D^{y'}(x, y, x', y') = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \cdot \underbrace{\begin{cases} \frac{\sinh(\frac{\pi n}{b}[a-x]) \sinh(\frac{\pi n}{b}x')}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)}, & \text{für } x > x' \\ \frac{\sinh(\frac{\pi n}{b}[a-x']) \sinh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\pi \frac{a}{b}n)}, & \text{für } x < x' \end{cases}}_{g_D(n, x, x')} \quad (\text{A.45})$$

### A.2.5 Phasenrekonstruktion mit Neumann-Randbedingungen

Der Lösungsweg soll im Weiteren wiederum nur für Neumann-Randbedingungen gezeigt werden, da sich eine Lösung unter Dirichlet-Randbedingungen analog zur folgenden Rechnungen ergibt. Ausgangspunkt der Betrachtung ist Gleichungen (A.11). Die Gleichung beschreibt, unter Kenntnis der Greenschen Funktion  $G$ , die deterministische Rekonstruktion der gesuchten Phasenverteilung über ihren Gradienten. Die Funktion  $G$  muss dabei innerhalb der rechteckigen Fläche  $R = a \times b$

$$\int_0^a \int_0^b \Phi_z(x', y') \nabla_{T'}^2 G(x, y, x', y') \, dx' dy' = \Phi_z(x, y) \quad (\text{A.46})$$

erfüllen. Das Integral über den Rand  $C$  in Gleichung (A.11) kann vernachlässigt werden, wenn die Greensche Funktion Neumann- bzw. Dirichlet-Randbedingungen erfüllt oder die zu integrierende Fläche  $R$  unbegrenzt ist. Wie eingangs erwähnt, soll im Weiteren nur auf Neumann-Randbedingungen eingegangen werden. Gleichung (A.12) beschreibt die Lösung nach der Phasenverteilung unter Annahme des unbegrenzten freien Raumes. Unter Beachtung von Neumann-Randbedingungen kann (A.12) in

$$\Phi_{z,N}(x, y) = - \int_0^a \int_0^b \{ \nabla_{T'} \Phi_z(x', y') \cdot \nabla_{T'} G_N(x, y, x', y') \} \, dx' dy' \quad (\text{A.47})$$

umgeschrieben werden.

Mit

$$\nabla_{T'} \Phi_z(x', y') = \begin{pmatrix} \Phi_z^{x'}(x', y') \\ \Phi_z^{y'}(x', y') \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

und

$$\nabla_{T'} G_N(x, y, x', y') = \begin{pmatrix} G_N^{x'}(x, y, x', y') \\ G_N^{y'}(x, y, x', y') \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

ergibt sich für Gleichung (A.47)

$$\begin{aligned} \Phi_{z,N}(x, y) = & \underbrace{- \int_0^a \int_0^b \left\{ \Phi_z^{x'}(x', y') G_N^{x'}(x, y, x', y') \right\} dx' dy'}_{\Phi_{z,N}^x(x, y)} \\ & - \underbrace{\int_0^a \int_0^b \left\{ \Phi_z^{y'}(x', y') G_N^{y'}(x, y, x', y') \right\} dx' dy'}_{\Phi_{z,N}^y(x, y)} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Die Berechnung von  $\Phi_{z,N}(x, y)$  kann demnach in zwei voneinander unabhängige Teile  $\Phi_{z,N}^x(x, y)$  und  $\Phi_{z,N}^y(x, y)$  zerlegt werden. Die vollständige Phasenverteilung ergibt sich dann durch

$$\Phi_{z,N}(x, y) = \Phi_{z,N}^x(x, y) + \Phi_{z,N}^y(x, y) \quad (\text{A.51})$$

Um den weiteren Verlauf der Herleitung übersichtlicher zu gestalten, wird zu Anfang nur auf den ersten Summanden der rechten Seite in Gleichung (A.50) eingegangen. Die in der Gleichung angeführte Funktion  $G_N^{x'}(x, y, x', y')$  wurde bereits bestimmt. Sie ist in Gleichung (A.42) beschrieben.

$$\begin{aligned} \Phi_{z,N}^x(x, y) &= - \int_0^a \int_0^b \left\{ \Phi_z^{x'}(x', y') G_N^{x'}(x, y, x', y') \right\} dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$= - \int_0^a \int_0^b \left\{ \Phi_z^{x'}(x', y') \cdot \left\{ -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) g_N(m, y, y') \right\} \right\} dx' dy' \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{a} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b g_N(m, y, y') \underbrace{\left\{ \int_0^a \Phi_z^{x'}(x', y') \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) dx' \right\}}_{A_1} dy' \right\} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_2} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_3} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Die Terme  $A_1, A_2$  und  $A_3$  sollen nun nacheinander genauer betrachtet werden. Hierfür wir die Variable  $f_x = \frac{m\pi}{a}$  eingeführt.

$$A_1 = \int_0^a \Phi_z^{x'}(x', y') \sin(f_x x') dx' \quad (\text{A.55})$$



Wie aus der Gleichung ersichtlich, stellt  $A_1$  den Imaginärteil der in  $x'$ -Richtung Fourier transformierten Funktion  $\Phi_z^{x'}(x', y')$  dar.

$$A_1 = \mathcal{I}[\mathcal{F}_x\{\Phi_z^{x'}(x', y')\}] \quad (\text{A.56})$$

$A_1$  kann umgeschrieben werden zu,

$$= A_1(f_x, y') \quad (\text{A.57})$$

Mit der neu definierten Funktion  $A_1(f_x, y')$  lässt sich  $A_2$  schreiben als

$$A_2 = \int_0^b g_N(m, y, y') A_1(f_x, y') dy' \quad (\text{A.58})$$

Wie aus Gleichung (A.42) ersichtlich, ist die Funktion  $g_N(m, y, y')$  fallabhängig. Je nachdem, ob  $y > y'$  bzw.  $y < y'$ , ist sie unterschiedlich zu implementieren. Aufgrund der Eigenschaft der Funktion  $g_N(m, y, y')$  können die zwei Fälle in zwei unabhängige Integrale aufgeteilt werden. Dies wurde auch von Lyuboshenko et al. [58] vorgeschlagen.

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\cosh(f_x [b - y])}{\sinh(f_x b)} \int_0^y \cosh(f_x y') A_1(f_x, y') dy' \\ &\quad + \frac{\cosh(f_x y)}{\sinh(f_x b)} \int_y^b \cosh(f_x [b - y']) A_1(f_x, y') dy' \\ &= A_2(f_x, y) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Wird nun die Funktion  $A_2(f_x, y)$  in den Ausdruck für  $A_3$  eingesetzt, so ergibt sich auch für diesen eine offensichtliche Rechenvorschrift:

$$A_3 = \sum_{m=1}^{\infty} A_2(f_x, y) \cos(f_x x) \quad (\text{A.60})$$

Die Funktion  $A_3$  stellt den Realteil der diskreten, inversen, in  $f_x$ -Richtung Fourier transformierten Funktion  $A_2(f_x, y)$  dar.

$$= \mathcal{R}[\mathcal{F}_{f_x}^{-1}\{A_2(f_x, y)\}] \quad (\text{A.61})$$

$$= A_3(x, y) \quad (\text{A.62})$$

Somit ist der allgemeine Ablauf einer Berechnung vorgestellt. Der Gradient der gesuchten Phasenfunktion in  $x'$ -Richtung wird Fourier transformiert. Von der Transformaten wird nur der Imaginärteil für die Weiterverarbeitung genutzt. Im Folgenden wird für jede Kombination  $(f_x, y)$  das Integral des Produkts des Imaginärteils und der Funktion  $g_N(m, y, y')$  über  $y'$  gebildet. Das

Integral wird dabei in zwei Teile aufgespalten, um die Fallunterscheidung  $y > y'$  bzw.  $y < y'$  zu realisieren. Im letzten Schritt wird das vorher gewonnen Ergebnis einer inversen Fourier-Transformation unterzogen, wobei nur der Realteil von Bedeutung ist. Die gesamte Rechnung soll nun in einer Gleichung dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Phi_{z,N}^x(x, y) &= \frac{2}{a} \left\{ \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_x [b - y])}{\sinh(f_x b)} \int_0^y \left\{ \cosh(f_x y') \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_x \{ \Phi_z^{x'}(x', y') \} \right] \right\} dy' \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_x y)}{\sinh(f_x b)} \int_y^b \left\{ \cosh(f_x [b - y']) \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_x \{ \Phi_z^{x'}(x', y') \} \right] \right\} dy' \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Werden die Schritte der Herleitung ab Gleichung (A.50) bis Gleichung (A.63) für die Funktion  $\Phi_{z,N}^y(x, y)$  wiederholt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_{z,N}^y(x, y) &= \frac{2}{b} \left\{ \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_y [a - x])}{\sinh(f_y a)} \int_0^x \left\{ \cosh(f_y x') \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_y \{ \Phi_z^{y'}(x', y') \} \right] \right\} dx' \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_y x)}{\sinh(f_y a)} \int_x^a \left\{ \cosh(f_y [a - x']) \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_y \{ \Phi_z^{y'}(x', y') \} \right] \right\} dx' \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

als Gleichung für  $\Phi_{z,N}^y(x, y)$ . Für die gesamte gesuchte Phasenverteilung  $\Phi_{z,N}(x, y)$  ergibt sich, wie in Gleichung (A.51) dargestellt, die Summe aus den beiden Einzellösungen  $\Phi_{z,N}^x(x, y)$  und  $\Phi_{z,N}^y(x, y)$ . Die gesuchte Phasenverteilung  $\Phi_{z,N}(x, y)$  kann mit Hilfe der geeigneten Greenschen Funktion und unter Kenntnis von  $\Phi_z^{x'}(x', y')$  und  $\Phi_z^{y'}(x', y')$  berechnet werden. Es gilt nun zu klären, wie diese beiden Funktionen zu bestimmen sind. Aus Gleichung (A.48) ist bekannt, dass die Funktion  $\Phi_z^{x'}(x', y')$  bzw.  $\Phi_z^{y'}(x', y')$  der Ableitung der gesuchten Phasenfunktion in  $x'$ - bzw.  $y'$ -Richtung entspricht. Zur Lösung der Gleichung (A.63) bzw. (A.64) muss also der Gradient der gesuchten Phasenverteilung bekannt sein. In [67] stellten Abramochkin et al. einen Zusammenhang zwischen dem Gradienten der Phasenverteilung in  $x'$ - und  $y'$ -Richtung und der Änderung der Intensitätsverteilung in Ausbreitungsrichtung her. Das sich ausbreitenden Wellenfeld muss dabei die parabolische Wellengleichung (siehe Abschnitt 2.1) erfüllen. Unter der Annahme, dass das Vektorfeld  $I(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{T}'} \Phi(\mathbf{r}')$  ein Gradientenfeld ist (siehe Abschnitt 2.4.2), ergibt sich der folgende Zusammenhang [67]:

$$\nabla_{\mathbf{T}'} \Phi_z(\mathbf{r}') = \frac{k}{I_z(\mathbf{r}')} \int_R \left\{ \frac{\partial I_z(\mathbf{r}'')}{\partial z} \cdot \nabla_{\mathbf{T}''} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} d\mathbf{r}'' \quad (\text{A.65})$$

An dieser Stelle wird nun die Formulierung für den Gradienten der Phasenverteilung  $\Phi_z(\mathbf{r}')$  aus Gleichung (A.48) in obige Gleichung eingesetzt. Eine Darstellung für den Gradient der Greenschen Funktion ist in Gleichung (A.49) zu finden. Allerdings müssen an dieser Stelle die

Koordinaten  $x$  und  $y$  in einfach und  $x'$  und  $y'$  zweifach gestrichene Größen umbenannt werden. Abgesehen davon bleibt die Gleichung erhalten. Nach Einsetzen der Vektorausdrücke für die Gradienten ergeben sich zwei Gleichungen, welche jeweils die Lösung für die  $x'$ - bzw.  $y'$ -Komponente des Gradienten der Phasenverteilung beschreiben. Wird, wie im gesamten Abschnitt, von einem rechteckigen Gebiet  $R = a \times b$  und Neumann-Randbedingungen ausgegangen, so sind die beiden Komponenten des Gradienten der Phasenverteilung durch

$$\Phi_{z,N}^{x'}(x', y') = \frac{k}{I_z(x', y')} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} G_N^{x''}(x', y', x'', y'') \right\} dx'' dy'' \quad (\text{A.66})$$

$$\Phi_{z,N}^{y'}(x', y') = \frac{k}{I_z(x', y')} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} G_N^{y''}(x', y', x'', y'') \right\} dx'' dy'' \quad (\text{A.67})$$

gegeben. Diese beiden Gleichungen haben einen Integranden, dessen Form ähnlich dem in den beiden Gleichungen zur Berechnung des  $x$ - und  $y$ -Anteils der gesamten Phasenfunktion  $\Phi_{z,N}(\mathbf{r})$  [siehe Gleichungen (A.50) und (A.52)] ist. Demnach können die beiden Komponenten des Gradienten auf gleiche Weise berechnet werden, wie dies auch für den  $x$ - und  $y$ -Teil nach den Gleichungen (A.63) und (A.64) geschieht.

$$\begin{aligned} & \Phi_{z,N}^{x'}(x', y') \\ &= \frac{k}{I_z(x', y')} \frac{2}{a} \left\{ \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_{x'} [b - y'])}{\sinh(f_{x'} b)} \int_0^{y'} \left\{ \cosh(f_{x'} y'') \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dy'' \right\} \right] \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_{x'} y')}{\sinh(f_{x'} b)} \int_{y'}^b \left\{ \cosh(f_{x'} [b - y'']) \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dy'' \right\} \right] \right\} \quad (\text{A.68}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \Phi_{z,N}^{y'}(x', y') \\ &= \frac{k}{I_z(x', y')} \frac{2}{b} \left\{ \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_{y'} [a - x'])}{\sinh(f_{y'} a)} \int_0^{x'} \left\{ \cosh(f_{y'} x'') \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_y \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dx'' \right\} \right] \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\cosh(f_{y'} x')}{\sinh(f_{y'} a)} \int_{x'}^a \left\{ \cosh(f_{y'} [a - x'']) \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_y \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dx'' \right\} \right] \right\} \quad (\text{A.69}) \end{aligned}$$

Die gesamte Berechnung der gesuchten zweidimensionalen Phasenverteilung  $\Phi_{z,N}(x, y)$  ist somit in zwei Abschnitte zu unterteilen. Zum Ersten wird der Gradient der Phasenverteilung auf Basis der Ableitung der Intensitätsverteilung in Ausbreitungsrichtung bestimmt. Gelöst wird dieses Problem mit Hilfe der geeigneten Greenschen Funktion unter Neumann-Randbedingungen. Die Formeln für die beiden Komponenten des Gradienten der Phasenverteilung sind in den Gleichungen (A.68) und (A.69) angegeben. Sind die beiden Funktionen  $\Phi_{z,N}^{x'}(x', y')$  und  $\Phi_{z,N}^{y'}(x', y')$

bestimmt, so dienen diese als Grundlage für den zweiten Schritt: Einsetzen der Lösungen für die  $x'$ -Richtung in Gleichungen (A.63) bzw. der  $y'$ -Richtung in (A.64) und anschließende Addition der beiden Teillösungen nach Gleichung (A.51) ergibt die gesuchte Phasenverteilung  $\Phi_{z,N}(x, y)$ . Aus den Gleichungen (A.50), (A.52), (A.66) und (A.67) ist ersichtlich, dass der gleiche Lösungsalgorithmus, genauer gesagt die Integration mit dem Gradienten einer Greenschen Funktion, zweimal durchlaufen werden muss. Einmal um den Gradienten der Phasenverteilung zu bestimmen und zum Zweiten, um aus dem erhaltenen Gradienten die endgültige Phasenfunktion zu berechnen. Die einzige Eingangsgröße der gesamten Berechnung ist, neben der Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$ , die Ableitung der Intensitätsverteilung in Ausbreitungsrichtung  $\partial I/\partial z$ .

### A.2.6 Phasenrekonstruktion mit Dirichlet-Randbedingungen

Wird in der Herleitung des vorherigen Abschnitts A.2.5 die Greensche Funktion nach Gleichung (A.19) aus den Eigenfunktionen nach Gleichung (A.15) erstellt, d.h. die so konstruierte Greensche Funktion erfüllt Dirichlet-Randbedingungen, so kann gezeigt werden, dass die Lösungsformel der gesuchten Phasenverteilung unter diesen Randbedingungen

$$\Phi_{z,D}(x, y) = \Phi_{z,D}^x(x, y) + \Phi_{z,D}^y(x, y) \quad (\text{A.70a})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{z,D}^x(x, y) = & \frac{2}{a} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_x [b - y])}{\sinh(f_x b)} \int_0^y \left\{ \sinh(f_x y') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \{ \Phi_D^{x'}(x', y') \} \right] \right\} dy' \right\} \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_x y)}{\sinh(f_x b)} \int_y^b \left\{ \sinh(f_x [b - y']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \{ \Phi_{z,D}^{x'}(x', y') \} \right] \right\} dy' \right\} \right] \right\} \quad (\text{A.70b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{z,D}^y(x, y) = & \frac{2}{b} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_y [a - x])}{\sinh(f_y a)} \int_0^x \left\{ \sinh(f_y x') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \{ \Phi_D^{y'}(x', y') \} \right] \right\} dx' \right\} \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_y x)}{\sinh(f_y a)} \int_x^a \left\{ \sinh(f_y [a - x']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \{ \Phi_{z,D}^{y'}(x', y') \} \right] \right\} dx' \right\} \right] \right\} \quad (\text{A.70c}) \end{aligned}$$

ist. Hierbei wurden die schon in den Gleichungen (A.44) und (A.45) aufgezeigten Richtungsableitungen der Greenschen Funktion unter Dirichlet-Randbedingungen verwendet. Für die Bestimmung des Gradienten der Phasenverteilung ergibt sich, analog zur Herleitung aus dem vorherigen Abschnitt und aufgrund der Greenschen Funktion unter Dirichlet-Randbedingungen, für die  $x'$ -

Komponente

$$\begin{aligned}
& \Phi_{z,D}^{x'}(x', y') \\
&= \frac{k}{I_z(x', y')} \frac{2}{a} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_{x'} [b - y'])}{\sinh(f_{x'} b)} \int_0^{y'} \left\{ \sinh(f_{x'} y'') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dy'' \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_x}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_{x'} y')}{\sinh(f_{x'} b)} \int_{y'}^b \left\{ \sinh(f_{x'} [b - y'']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dy'' \right] \right] \right\} \right\} \quad (A.71)
\end{aligned}$$

Für die  $y'$ -Komponente des Gradienten der Phasenverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \Phi_{z,D}^{y'}(x', y') \\
&= \frac{k}{I_z(x', y')} \frac{2}{b} \left\{ \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_{y'} [a - x'])}{\sinh(f_{y'} a)} \int_0^{x'} \left\{ \sinh(f_{y'} x'') \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dx'' \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{I} \left[ \mathcal{F}_{f_y}^{-1} \left\{ \frac{\sinh(f_{y'} x')}{\sinh(f_{y'} a)} \int_{x'}^a \left\{ \sinh(f_{y'} [a - x'']) \mathcal{R} \left[ \mathcal{F}_y \left\{ \frac{\partial I_z(x'', y'')}{\partial z} \right\} \right] \right\} dx'' \right] \right] \right\} \right\} \quad (A.72)
\end{aligned}$$

Einsetzen der beiden Teillösungen für die Ableitungen der Phasenverteilung (A.71) und (A.72) in Gleichung (A.70) ergibt die Gesamtlösung zur Berechnung der gesuchten Phasenverteilung unter Dirichlet-Randbedingungen. Somit ist auch eine mathematische Formulierung zur Berechnung der Phasenverteilung unter diesen Randbedingungen gefunden. Der Unterschied der beiden Lösungen unter Neumann- bzw. Dirichlet-Randbedingungen liegt lediglich in der Art der Greenschen Funktion. Im Fall von Neumann-Randbedingungen wird die Greensche Funktion nur aus Cosinus-Funktionen [siehe Gleichungen (A.16) und (A.19)], im Fall von Dirichlet-Randbedingungen nur aus Sinus-Funktionen [siehe Gleichungen (A.15) und (A.19)] konstruiert. Dies hat zur Folge, dass sich die beiden Formeln, zur Berechnung unter den beiden Randbedingungen, nur geringfügig unterscheiden. Während die Berechnung unter Dirichlet-Randbedingungen nur auf *sinh*-Funktionen basiert, sind in der Formel unter Neumann-Randbedingungen *sinh*- und *cosh*-Funktionen vorhanden. Lediglich bei den eindimensionalen Fourier-Transformationen tritt ein weiterer Unterschied auf. Die Berücksichtigung des Real- ( $\mathcal{R}$ ) und Imaginärteils ( $\mathcal{I}$ ), nach den Transformationen, ist bei den beiden Randbedingungen, wegen der Beschaffenheit der jeweiligen Greenschen Funktion bzw. deren Richtungsableitung, vertauscht.



# Literaturverzeichnis

- [1] LAUTERBORN, Werner ; KURZ, Thomas: *Coherent Optics: Fundamentals and Applications*. 2. Berlin, Deutschland : Springer, 2003. – ISBN 3–540–43933–1
- [2] KREIS, Thomas: *Handbook of Holographic Interferometry*. 1. Berlin, Deutschland : Wiley-VCH, 2005. – ISBN 3–527–40546–1
- [3] SCHNARS, Ulf ; JÜPTNER, Werner: *Digital Holography*. 1. Berlin, Deutschland : Springer, 2005. – ISBN 3–540–21934–x
- [4] WERNICKE, Günther ; OSTEN, Wolfgang: *Holografische Interferometrie: Grundlagen, Methoden und Ihre Anwendung in Der Festkörpermechanik*. 1. Weinheim, Deutschland : Physik-Verlag, 1982. – ISBN 3–87664–066–0
- [5] GERCHBERG, R. W. ; SAXTON, W. O.: A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. In: *Optik* Volume 35 (1972), April, Nr. 2, S. 237–246
- [6] FIENUP, James R.: Phase retrieval algorithms: a comparison. In: *Applied Optics* Volume 21 (1982), August, Nr. 15, S. 2758–2769
- [7] SELDIN, J. H. ; FIENUP, J. R.: Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 7 (1990), März, Nr. 3, S. 412–427
- [8] FIENUP, James R.: Phase-retrieval algorithms for a complicated optical systems. In: *Applied Optics* Volume 32 (1993), April, Nr. 10, S. 1737–1746
- [9] FIENUP, J. R. ; WACKERMAN, C. C.: Phase-retrieval stagnation problems and solutions. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 3 (1986), November, Nr. 11, S. 1897–1907
- [10] ANAND, Arun ; CHHANIWAL, Vani ; JAVIDI, Bahram: Quantitative cell imaging using single beam phase retrieval method. In: *Journal of Biomedical Optics* Volume 16 (2011), Juni, Nr. 6, S. 060503(1)–060503(3)
- [11] FAULKNER, H. M. L. ; ALLEN, L. J. ; OXLEY, M. P. ; PAGANIN, D.: Computational aberration determination and correction. In: *Optics Communications* Volume 216 (2003), Februar, Nr. 1-3, S. 89–98
- [12] GRJASNOW, A. ; WUTTIG, A. ; RIESENBERG, R.: Phase resolving microscopy by multi-plane diffraction detection. In: *Journal of Microscopy* Volume 231 (2008), Juli, Nr. 1, S. 115–123

- [13] MIGUKIN, Artem ; KATKOVNIK, Vladimir ; ASTOLA, Jaakko: Optimal phase retrieval from multiple observations with Gaussian noise: augmented Lagrangian algorithm for phase objects. In: *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VII, Proceedings of the SPIE* Bd. 8082. United States : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2011, S. 80820L
- [14] PEDRINI, Giancarlo ; ZHANG, Fucui ; OSTEN, Wolfgang: Deterministic phase retrieval from diffracted intensities speckle fields. In: *Optics Communications* Volume 277 (2007), September, Nr. 1, S. 50–56
- [15] PEDRINI, Giancarlo ; ZHANG, Fucui ; OSTEN, Wolfgang: Phase retrieval by pinhole scanning. In: *Optics Letters* Volume 36 (2011), April, Nr. 7, S. 1113–1115
- [16] GOODMAN, Joseph W.: *Introduction to Fourier Optics*. 3. Greenwood Village, United States : Roberts & Company Publishers, 2005. – ISBN 0–9747077–2–4
- [17] CAMACHO, Luis ; MICÓ, Vicente ; ZALEVSKY, Zeev ; GARCÍA, Javier: Phase extraction in microscopy using tunable defocusing by means of a SLM. In: *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VII, Proceedings of the SPIE* Bd. 8082. United States : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2011, S. 80820O
- [18] AGOUR, Mostafa ; FALLDORF, Claas ; KOPYLOW, Christoph v. ; BERGMANN, Ralf B.: Automated compensation of misalignment in phase retrieval based on a spatial light modulator. In: *Applied Optics* Volume 50 (2011), August, Nr. 24, S. 4779–4787
- [19] CHEN, Wen ; CHEN, Xudong: Quantitative phase retrieval of complex-valued specimens based on noninterferometric imaging. In: *Applied Optics* Volume 50 (2011), April, Nr. 14, S. 2008–2015
- [20] AGOUR, Mostafa ; HUKÉ, Philipp ; KOPYLOW, Christoph v. ; FALLDORF, Claas: Shape Measurement by Means of Phase Retrieval using a Spatial Light Modulator. In: *International Conference on Advanced Phase Measurement Methods in Optics and Imaging, AIP Conf. Proc.* Bd. 1236. United States : American Institute of Physics, 2010, S. 265–270
- [21] RODRIGO, José A. ; ALIEVA, Tatiana ; CRISTÓBAL, Gabriel ; CALVO, María L.: Wavefield imaging via iterative retrieval based on phase modulation diversity. In: *Optics Express* Volume 19 (2011), September, Nr. 19, S. 18621–18635
- [22] AGOUR, Mostafa ; FALLDORF, Claas ; KOPYLOW, Christoph v. ; BERGMANN, Ralf B.: The effect of misalignment in phase retrieval based on a spatial light modulator. In: *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VII, Proceedings of the SPIE* Bd. 8082. United States : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2011, S. 80820M
- [23] FALLDORF, Claas ; AGOUR, Mostafa ; KOPYLOW, Christoph v. ; BERGMANN, Ralf B.: Phase retrieval by means of a spatial light modulator in the Fourier domain of an imaging system. In: *Applied Optics* Volume 49 (2010), April, Nr. 10, S. 1826–1830



- [24] MARTIN, A. V. ; ALLEN, L. J.: Direct retrieval of a complex wave from its diffraction pattern. In: *Optics Communications* Volume 281 (2008), Oktober, Nr. 20, S. 5114–5121
- [25] NAKAJIMA, Nobuharu: Noniterative Two-Dimensional Phase-Retrieval Method from Two Fourier Intensities by Use of an Exponential Filter. In: *Applied Optics* Volume 42 (2003), Mai, Nr. 14, S. 2492–2497
- [26] NAKAJIMA, Nobuharu: Lensless Imaging from Diffraction Intensity Measurements by Use of a Noniterative Phase-Retrieval Method. In: *Applied Optics* Volume 43 (2004), März, Nr. 8, S. 1710–1718
- [27] NAKAJIMA, Nobuharu: Noniterative Phase Retrieval from a Single Diffraction Intensity Pattern by Use of an Aperture Array. In: *Physical Review Letters* Volume 98 (2007), Juni, Nr. 22, S. 223901(1)–223901(4)
- [28] NAKAJIMA, Nobuharu: Lensless coherent imaging by a deterministic phase retrieval method with an aperture-array filter. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 25 (2008), März, Nr. 3, S. 742–750
- [29] NAKAJIMA, Nobuharu: Phase retrieval from a high-numerical-aperture intensity distribution by use of an aperture-array filter. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 26 (2009), Oktober, Nr. 10, S. 2172–2180
- [30] NAKAJIMA, Nobuharu: Phase retrieval using an aperture-array filter under partially coherent illumination. In: *Optics Communications* Volume 282 (2009), Juni, Nr. 11, S. 2128–2135
- [31] BEYER, Hermann (Hrsg.) ; RIESENBERG, Horst (Hrsg.): *Handbuch der Mikroskopie*. 3. Berlin, Deutschland : VEB Verlag Technik, 1988. – ISBN 3–341–00283–9
- [32] KOU, Shan S. ; SHEPPARD, Colin: Linear Phase Recovery From DIC Microscope. In: *International Conference on Advanced Phase Measurement Methods in Optics and Imaging, AIP Conf. Proc.* Bd. 1236. United States : American Institute of Physics, 2010, S. 301–306
- [33] KOU, Shan S. ; SHEPPARD, Colin: Quantitative phase restoration in differential interference contrast (DIC) microscopy. In: *Optical and Digital Image Processing, Proceedings of the SPIE* Bd. 7000. United States : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2008, S. 700005(1)–700005(8)
- [34] PAGANIN, D. ; GUREYEV, T. E. ; PAVLOV, K. M. ; LEWIS, R. A. ; KITCHEN, M.: Phase retrieval using coherent imaging systems with linear transfer functions. In: *Optics Communications* Volume 234 (2004), April, Nr. 1-6, S. 87–105
- [35] TEAGUE, Micheal R.: Deterministic phase retrieval: a Green's function solution. In: *Journal of the Optical Society of America* Volume 73 (1983), November, Nr. 11, S. 1434–1441

- [36] RODDIER, Francois: Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics. In: *Applied Optics* Volume 27 (1988), April, Nr. 7, S. 1223–1225
- [37] RODDIER, Francois ; RODDIER, Claude: Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms. In: *Applied Optics* Volume 30 (1991), April, Nr. 11, S. 1325–1327
- [38] RODDIER, Claude ; RODDIER, Francois: Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground based optical telescopes. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 10 (1993), November, Nr. 11, S. 2277–2287
- [39] PLIAKIS, Dimitris ; MINARDI, Stefano: Phase front retrieval by means of an iterative shadowgraphic method. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 26 (2009), Januar, Nr. 1, S. 99–107
- [40] BELEGGA, M. ; SCHOFIELD, M. A. ; VOLKOV, V. V. ; ZHU, Y.: On the transport of intensity technique for phase retrieval. In: *Ultramicroscopy* Volume 102 (2004), Dezember, Nr. 1, S. 37–49
- [41] FRANK, Johannes ; ALTMAYER, Stefan ; WERNICKE, Günther: Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green's functions. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 27 (2010), Oktober, Nr. 10, S. 2244–2251
- [42] FRANK, Johannes ; WERNICKE, Günther ; MATRISCH, Jan ; WETTE, Sebastian ; BENEKE, Jan ; ALTMAYER, Stefan: Quantitative determination of the optical properties of phase objects by using a real-time phase retrieval technique. In: *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VII, Proceedings of the SPIE* Bd. 8082. United States : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2011, S. 80820N
- [43] PAGANIN, David ; NUGENT, Keith A.: Noninterferometric Phase Imaging with Partially Coherent Light. In: *Physical Review Letters* Volume 80 (1998), März, Nr. 12, S. 2586–2589
- [44] ALLMAN, Brendan E. ; NUGENT, Keith A.: Shape Imaging in Defence Operations. In: *Proceedings Land Warfare Conference*. Brisbane, Australia : DSTO Publishing, Oktober 2006
- [45] NUGENT, K. A. ; PAGANIN, D. ; BARTY, A.: *Phase determination of a radiation wave field*. United States Patent 7,039,553 B2, Mai 2006
- [46] ALLEN, L. J. ; OXLEY, M. P.: Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation. In: *Optics Communications* Volume 199 (2001), November, Nr. 1-4, S. 65–75
- [47] VOLKOV, V. V. ; ZHU, Y. ; GRAEF, M. D.: A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation. In: *Micron* Volume 33 (2002), Nr. 5, S. 411–416
- [48] GUREYEV, T. E. ; ROBERTS, A. ; NUGENT, K. A.: Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: matrix solution with use of Zernike polynomials. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 12 (1995), September, Nr. 9, S. 1932–1941

- [49] GUREYEV, Timur E. ; NUGENT, Keith A.: Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 13 (1996), August, Nr. 8, S. 1670–1682
- [50] BORN, Max ; WOLF, Emil: *Principles of Optics*. 7. Cambridge, United Kingdom : Cambridge University Press, 2003. – ISBN 0–521–64222–1
- [51] FRANK, Johannes ; WETTE, Sebastian ; BENEKE, Jan ; ALTMAYER, Stefan: GPU-based Real-time Phase Microscopy. In: *Novel Techniques in Microscopy, OSA Technical Digest (CD)*. United States : OSA - Optical Society of America, 2011, S. NTuB5
- [52] FRANK, Johannes ; MATRISCH, Jan ; BENEKE, Jan ; WETTE, Sebastian ; ALTMAYER, Stefan ; WERNICKE, Günther: Quantitative Phasenrekonstruktion in Echtzeit unter Verwendung der Intensitäts-Transport-Gleichung. In: *DGaO-Proceeding der 112. Jahrestagung, DGaO - Deutsche Gesellschaft für angewandte Optik*, 2011, S. P053–1
- [53] FRANK, Johannes ; MATRISCH, Jan ; HORSTMANN, Jens ; ALTMAYER, Stefan ; WERNICKE, Günther: Refractive index determination of transparent samples by noniterative phase retrieval. In: *Applied Optics* Volume 50 (2011), Februar, Nr. 4, S. 427–433
- [54] SALEH, Bahaa E. A. ; TEICH, Malvin C.: *Fundamentals of Photonics*. 2. Hoboken, New Jersey, United States : John Wiley & Sons, Inc., 2007. – ISBN 978–0–471–35832–9
- [55] ENGELBERG, Yaakov M. ; RUSCHIN, Shlomo: Fast method for physical optics propagation of high-numerical-aperture beams. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 21 (2004), November, Nr. 11, S. 2135–2145
- [56] MATSUSHIMA, Kyoji ; SHIMOBABA, Tomoyoshi: Band-limited angular spectrum method for numerical simulation of free-space propagation in far and near fields. In: *Optics Express* Volume 17 (2009), Oktober, Nr. 22, S. 19662–19673
- [57] FORNARO, G. ; FRANCESCHETTI, G. ; LANARI, R.: Interferometric SAR phase unwrapping using Green’s formulation. In: *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing* Volume 34 (1996), Mai, Nr. 3, S. 720–727
- [58] LYUBOSHENKO, Igor ; MAITRE, Henri: Phase unwrapping for interferometric synthetic aperture radar by use of Helmholtz equation eigenfunctions and the first Green’s identity. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 16 (1999), Februar, Nr. 2, S. 378–395
- [59] LYUBOSHENKO, Igor ; MAITRE, Henri ; MARUANI, Alain: Least-Mean-Squares Phase Unwrapping by Use of an Incomplete Set of Residue Branch Cuts. In: *Applied Optics* Volume 41 (2002), April, Nr. 11, S. 2129–2148
- [60] LYUBOSHENKO, Igor ; MAITRE, Henri: Phase unwrapping for interferometric SAR using Helmholtz equation eigenfunctions and the first Green’s identity. In: *IGARSS ’98, Sensing and Managing the Environment, Proceedings of the International Geoscience and Remote Sensing Symposium* Bd. 4. United States : IEEE International, 1998, S. 2192–2194

- [61] LYUBOSHENKO, Igor ; MARUANI, Alain ; MAITRE, Henri: Residue influence on phase unwrapping by use of Green-Helmholtz formulation. In: *IGARSS '99, Proceedings of the International Geoscience and Remote Sensing Symposium* Bd. 3. United States : IEEE International, 1999, S. 1537–1539
- [62] MAITRE, Henri ; LYUBOSHENKO, Igor: Robust algorithms for phase unwrapping in SAR interferometry. In: *Image Processing, Signal Processing, and Synthetic Aperture Radar for Remote Sensing, Proceedings of the SPIE* Bd. 3217. United States : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1997, S. 176–187
- [63] AIELLO, L. ; RICCIO, D. ; FERRARO, P. ; GRILLI, S. ; SANSONE, L. ; COPPOLA, G. ; NICOLA, S. D. ; FINIZIO, A.: Green's formulation for robust phase unwrapping in digital holography. In: *Optics and Lasers in Engineering* Volume 45 (2007), Juni, Nr. 6, S. 750–755
- [64] SCHOFIELD, Marvin A. ; ZHU, Yimei: Fast phase unwrapping algorithm for interferometric applications. In: *Optics Letters* Volume 28 (2003), Juli, Nr. 14, S. 1194–1196
- [65] GHIGLIA, Dennis C. ; PRITT, Mark D.: *Two-Dimensional Phase Unwrapping*. 1. New York, United States : John Wiley & Sons, Inc., 1998. – ISBN 978-0-471-24935-1
- [66] POLYANIN, Andrei D.: *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Boca Raton, Florida, United States : Chapman & Hall/CRC, 2002. – ISBN 1-58488-299-9
- [67] ABRAMOCHKIN, E. G. ; VOLOSTNIKOV, V. G.: Relationship between two-dimensional intensity and phase in a Fresnel diffraction zone. In: *Optics Communications* Volume 74 (1989), Dezember, Nr. 3-4, S. 144–148
- [68] BARTY, A. ; NUGENT, K. A. ; PAGANIN, D. ; ROBERTS, A.: Quantitative optical phase microscopy. In: *Optics Letters* Volume 23 (1998), Juni, Nr. 11, S. 817–819
- [69] BARONE-NUGENT, E. D. ; BARTY, A. ; NUGENT, K. A.: Quantitative phase-amplitude microscopy I: optical microscopy. In: *Journal of Microscopy* Volume 206 (2002), Juni, Nr. 3, S. 194–203
- [70] DORRER, C. ; ZUEGEL, J. D.: Optical testing using the transport-of-intensity equation. In: *Optics Express* Volume 15 (2007), Juni, Nr. 12, S. 7165–7175
- [71] QUIROGA, Juan A. ; GÓMEZ-PEDRERO, Jose A. ; MARTÍNEZ-ANTÓN, Juan C.: Wavefront measurement by solving the irradiance transport equation for multifocal systems. In: *Optical Engineering* Volume 40 (2001), Dezember, Nr. 12, S. 2885–2891
- [72] RODDIER, Francois: Wavefront sensing and the irradiance transport equation. In: *Applied Optics* Volume 29 (1990), April, Nr. 10, S. 1402–1403
- [73] WOODS, Simon C. ; BLANCHARD, Paul M. ; GREENAWAY, Alan H.: Laser wavefront sensing using the intensity transport equation. In: *Proceedings of 2nd International Workshop on Adaptive Optics for Industry and Medicine*. Singapore : World Scientific, 2000, S. 260–265

- 
- [74] ALLMAN, B. E. ; GREGSON, G. P. ; POWELL, B. H. B.: Imaging by Shape. In: *Proceedings Land Warfare Conference*. Melbourne, Australia : DSTO Publishing, September 2004
- [75] EASTWOOD, Samuel A. ; PAGANIN, David M. ; LIU, Amelia C. Y.: Automated phase retrieval of a single-material object using a single out-of-focus image. In: *Optics Letters* Volume 36 (2011), Mai, Nr. 10, S. 1878–1880
- [76] FAULKNER, Helen M. L.: *Studies in phase and inversion problems for dynamical electron diffraction*, University of Melbourne, Diss., 2003
- [77] MCMOHAN, P. J. ; BARONE-NUGENT, E. D. ; ALLMAN, B. E. ; NUGENT, K. A.: Quantitative phase-amplitude microscopy II: differential interference contrast imaging for biological TEM. In: *Journal of Microscopy* Volume 206 (2002), Juni, Nr. 3, S. 204–208
- [78] PAGANIN, D. ; MAYO, S. C. ; GUREYEV, T. E. ; MILLER, P. R. ; WILKINS, S. W.: Simultaneous phase and amplitude extraction from a single defocused image of a homogeneous object. In: *Journal of Microscopy* Volume 206 (2002), Mai, Nr. 1, S. 33–40
- [79] VOLKOV, V. V. ; ZHU, Y.: Lorentz phase microscopy of magnetic materials. In: *Ultramicroscopy* Volume 98 (2004), Januar, Nr. 2-4, S. 271–281
- [80] ARHATARI, Benedicta D.: *High resolution phase contrast x-ray radiography*, University of Melbourne, Diss., 2006
- [81] ENDRIZZI, M. ; GUREYEV, T. E. ; DELOGU, P. ; OLIVA, P. ; GOLOSIO, B. ; CARPINELLI, M. ; POGORELSKY, I. ; YAKIMENKO, V. ; BOTTIGLI, U.: Quantitative phase retrieval with picosecond X-ray pulses from the ATF Inverse Compton Scattering source. In: *Optics Express* Volume 19 (2011), Januar, Nr. 3, S. 2748–2753
- [82] FOX, P. J. ; MACKIN, T. R. ; TURNER, L. D. ; COLTON, I. ; NUGENT, K. A. ; SCHOLTEN, R. E.: Noninterferometric phase imaging of a neutral atomic beam. In: *Journal of the Optical Society of America B* Volume 19 (2002), August, Nr. 8, S. 1773–1776
- [83] NUGENT, Keith A. ; PAGANIN, David ; GUREYEV, Timur E.: A Phase Odyssey. In: *Physics Today* Volume 54 (2001), August, Nr. 8, S. 27–32
- [84] TEAGUE, Micheal R.: Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase. In: *Journal of the Optical Society of America* Volume 72 (1982), September, Nr. 9, S. 1199–1209
- [85] TEAGUE, Micheal R.: Image formation in terms of the transport equation. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 2 (1985), November, Nr. 11, S. 2019–2026
- [86] ICHIKAWA, Kazuichi ; LOHMANN, Adolf W. ; TAKEDA, Mitsuo: Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments. In: *Applied Optics* Volume 27 (1988), August, Nr. 18, S. 3433–3436
- [87] KOLENOVIC, Erwin: *Untersuchung zur Kopplung von Intensität und Phase in monochromatischem Licht*, Universität Bremen, Diss., 2006

- [88] PAGANIN, David ; NUGENT, Keith A.: Phase measurement of waves that obey nonlinear equations. In: *Optics Letters* Volume 27 (2002), April, Nr. 8, S. 622–624
- [89] PINHASI, Shirly V. ; ELIEZER, Shalom ; GLAM, Benny ; APPELBAUM, Gabi ; BAKSHI, Lior: Noninterferometric topography measurements of fast moving surfaces. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 28 (2011), August, Nr. 8, S. 1562–1565
- [90] THAYYULLATHIL, Hemanth ; LANGOJU, Rajesh ; PADMARAM, Renganathan ; VASU, R. M. ; KANJIRODAN, Rajan ; PATNAIK, Lalit M.: Three-Dimensional Optical Tomographic Imaging of Supersonic Jets through Inversion of Phase Data Obtained through the Transport-of-Intensity Equation. In: *Applied Optics* Volume 43 (2004), Juli, Nr. 21, S. 4133–4141
- [91] VDOVIN, Gleb: Reconstruction of an object shape from the near-field intensity of a reflected paraxial beam. In: *Applied Optics* Volume 36 (1997), August, Nr. 22, S. 5508–5513
- [92] WALLER, Laura ; TIAN, Lei ; BARBASTATHIS, George: Transport of Intensity phase-amplitude imaging with higher order intensity derivatives. In: *Optics Express* Volume 18 (2010), Juni, Nr. 12, S. 12552–12561
- [93] WOODS, Simon C. ; GREENAWAY, Alan H.: Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 20 (2003), März, Nr. 3, S. 508–512
- [94] CAMPBELL, Charles: Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation: comment. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 24 (2007), August, Nr. 8, S. 2480–2481
- [95] WOODS, Simon C. ; CAMPBELL, Heather I. ; GREENAWAY, Alan H.: Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation: reply to comment. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 24 (2007), August, Nr. 8, S. 2482–2484
- [96] XUE, Bindang ; ZHENG, Shiling ; CUI, Linyan ; BAI, Xiangzhi ; ZHOU, Fugen: Transport of intensity phase imaging from multiple intensities measured in unequally-spaced planes. In: *Optics Express* Volume 19 (2011), Oktober, Nr. 21, S. 20244–20250
- [97] PAGANIN, D. ; NUGENT, K. A. ; ROBERTS, A. ; GUREYEV, T. E.: Rapid phase retrieval using the fast Fourier transform. In: *Technical Digest Series - Optical Society of America* Volume 23 (1995), S. 77–82
- [98] GUREYEV, Timur E. ; NUGENT, Keith A.: Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation. In: *Optics Communications* Volume 133 (1997), Januar, Nr. 1-6, S. 339–346
- [99] ABRAMOCHKIN, E. G. ; VOLOSTNIKOV, V. G.: Two-dimensional phase problem: Differential approach. In: *Optics Communications* Volume 74 (1989), Dezember, Nr. 3-4, S. 139–143

- [100] GUREYEV, T. E. ; NESTERETS, Ya. I. ; PAGANIN, D. ; POGANY, A. ; WILKINS, S. W.: Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region. 2. Partially coherent illumination. In: *Optics Communications* Volume 259 (2006), März, Nr. 2, S. 569–580
- [101] DUTTA, K. ; GOODMAN, J. W.: Reconstructions of images of partially coherent objects from samples of mutual intensity. In: *Journal of the Optical Society of America* Volume 67 (1977), Juni, Nr. 6, S. 796–803
- [102] STREIBL, Norbert: Phase imaging by the transport equation of intensity. In: *Optics Communications* Volume 49 (1984), Februar, Nr. 1, S. 6–10
- [103] ADE, George: On the validity of the transport equation for the intensity in optics. In: *Optics Communications* Volume 52 (1985), Januar, Nr. 5, S. 307–310
- [104] HORSTMANN, Jens: *Anwendung der Intensitätstransportgleichung auf die 3D-Messtechnik*, Fachhochschule Köln, Diplomarbeit, 2008
- [105] MATRISCH, Jan: *Anwendung der Intensitätstransportgleichung und Evaluierung darauf beruhender Messverfahren*, Fachhochschule Köln, Diplomarbeit, 2009
- [106] WETTE, Sebastian: *Mehr-kamerabasierende 3D-Echzeitmikroskopie auf Grundlage der Intensitäts-Transportgleichung*, Fachhochschule Köln, Diplomarbeit, 2010
- [107] HINZ, Sabine: *Phasenmessung an mikroskopischen Präparaten mit Hilfe eines Standard Mikroskopes und der Intensitäts-Transport Gleichung*, Fachhochschule Köln, Bachelorarbeit, 2011
- [108] ZYSK, Adam M. ; SCHOONOVER, Robert W. ; CARNEY, P. S. ; ANASTASIO, Mark A.: Transport of intensity and spectrum for partially coherent fields. In: *Optics Letters* Volume 35 (2010), Juli, Nr. 13, S. 2239–2241
- [109] GUREYEV, Timur E.: Transport of intensity equation for beams in an arbitrary state of temporal and spatial coherence. In: *Optik* Volume 110 (1999), Nr. 6, S. 263–266
- [110] BRENK, Udo: *Verfahrensentwicklung zur transienten quantitativen Phasenmikroskopie*, Fachhochschule Köln, Diplomarbeit, 2008
- [111] KÖHLER, August: Ein neues Beleuchtungsverfahren für mikrophotographische Zwecke. In: *Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie und für mikroskopische Technik* Band 10 (1893), Oktober, Nr. 4, S. 443–440
- [112] ZERNIKE, Frits: Phase contrast, a new method for the microscopic observation of transparent objects, Part I. In: *Physica* Volume 9 (1942), Juli, Nr. 7, S. 686–698
- [113] ZERNIKE, Frits: Phase contrast, a new method for the microscopic observation of transparent objects, Part II. In: *Physica* Volume 9 (1942), Dezember, Nr. 10, S. 974–986
- [114] NYE, J. F. ; BERRY, M. F.: Dislocations in Wave Trains. In: *Proceedings of the Royal Society of London A* Volume 336 (1974), Januar, Nr. 1605, S. 165–190

- [115] MORSE, Philip M. ; FESHBACH, Herman: *Methods of Theoretical Physics Part 1*. New York, United States : McGraw-Hill Inc., 1953. – ISBN 0–07–043316–X
- [116] GUREYEV, T. E. ; ROBERTS, A. ; NUGENT, K. A.: Partially coherent fields, the transport-of-intensity equation, and phase uniqueness. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 12 (1995), September, Nr. 9, S. 1942–1946
- [117] BENEKE, Jan-Maximilian: *Deterministische Echtzeit-Phasenrekonstruktion mittels GPG-PU*, Fachhochschule Köln, Bachelorarbeit, 2010
- [118] PAGANIN, D. ; BARTY, A. ; MCMOHAN, P. J. ; NUGENT, K. A.: Quantitative phase-amplitude microscopy III: the effects of noise. In: *Journal of Microscopy* Volume 214 (2004), April, Nr. 1, S. 51–61
- [119] BELLAIR, C. J. ; CURL, C. L. ; ALLMAN, B. E. ; HARRIS, P. J. ; ROBERTS, A. ; DELBRIDGE, L. M. D. ; NUGENT, K. A.: Quantitative phase-amplitude microscopy IV: imaging thick specimens. In: *Journal of Microscopy* Volume 214 (2004), April, Nr. 1, S. 62–69
- [120] MARTIN, A. V. ; CHEN, F.-R. ; HSIEH, W.-K. ; KAI, J.-J. ; FINDLAY, S. D. ; ALLEN, L. J.: Spatial incoherence in phase retrieval based on focus variation. In: *Ultramicroscopy* Volume 106 (2006), August, Nr. 10, S. 914–924
- [121] SOTO, M. ; ACOSTA, E. ; RÍOS, S.: Performance analysis of curvature sensors: optimum positioning of the measurement planes. In: *Optics Express* Volume 11 (2003), Oktober, Nr. 20, S. 2577–2588
- [122] BARBERO, Sergio ; THIBOS, Larry N.: Error analysis and correction in wavefront reconstruction from the transport-of-intensity equation. In: *Optical Engineering* Volume 45 (2006), September, Nr. 9, S. 094001(1)–094001(6)
- [123] SHEPPARD, Collin J. R.: Defocused transfer function for a partially coherent microscope and application to phase retrieval. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 21 (2004), Mai, Nr. 5, S. 828–831
- [124] SCHOFIELD, M. A. ; BELEGGA, M. ; VOLKOV, V. V. ; ZHU, Y.: Detection Limits and Resolution for Quantitative Phase Retrieval Through Transport-of-Intensity. In: *Microscopy and Microanalysis* Volume 10 (2004), August, Nr. S02, S. 506–507
- [125] ZHUANG, S. L. ; YU, F. T. S.: Apparent transfer function for partially coherent optical information processing. In: *Applied Physics B* Volume 28 (1982), August, Nr. 4, S. 359–366
- [126] SHEPPARD, Collin J. R.: Three-dimensional phase imaging with the intensity transport equation. In: *Applied Optics* Volume 41 (2002), Oktober, Nr. 28, S. 5951–5955
- [127] STREIBL, Norbert: Three-dimensional image formation with optical imaging. In: *Zeiss Information* Volume 31 (1992), Nr. 103, S. 36–40
- [128] STREIBL, Norbert: Three-dimensional imaging by a microscope. In: *Journal of the Optical Society of America A* Volume 2 (1985), Februar, Nr. 2, S. 121–127



- [129] KOU, Shan S. ; WALLER, Laura ; BARBASTATHIS, George ; MARQUET, Pierre ; DEPEURSINGE, Christian ; SHEPPARD, Colin J. R.: Quantitative phase restoration by direct inversion using the optical transfer function. In: *Optics Letters* Volume 36 (2011), Juli, Nr. 14, S. 2671–2673
- [130] FFTW.ORG (Hrsg.): *Fastest Fourier Transform in the West - FFTW*. <http://www.fftw.org>, Abruf: 01. November 2012
- [131] NVIDIA CORPORATION (Hrsg.): *nvidia CUFFT*. <https://developer.nvidia.com/cufft>, Abruf: 01. November 2012
- [132] KOU, Shan S. ; WALLER, Laura ; BARBASTATHIS, George ; SHEPPARD, Colin J. R.: Transport-of-intensity approach to differential interference contrast (TI-DIC) microscopy for quantitative phase imaging. In: *Optics Letters* Volume 35 (2010), Februar, Nr. 3, S. 447–449
- [133] WALLER, Laura ; KOU, Shan S. ; SHEPPARD, Colin J. R. ; BARBASTATHIS, George: Phase from chromatic aberrations. In: *Optics Express* Volume 18 (2010), Oktober, Nr. 22, S. 22817–22825
- [134] ALTMAYER, Stefan ; FRANK, Johannes: Optics and information technology. In: BULLINGER, Hans-Jörg (Hrsg.): *Technology Guide. Principles - Applications - Trends*. Berlin, Deutschland : Springer, 2009. – ISBN 978–3–540–88545–0, S. 98–103
- [135] BERGMANN, Ludwig ; SCHÄFER, Clemens: *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, Optik*. 9. Berlin, Deutschland : Walter de Gruyter, 1993. – ISBN 3–11–012973–6
- [136] GUREYEV, Timur E.: Composite techniques for phase retrieval in the Fresnel region. In: *Optics Communications* Volume 220 (2003), Mai, Nr. 1-3, S. 49–58
- [137] GUREYEV, T. E. ; POGANY, A. ; PAGANIN, D. ; WILKINS, S. W.: Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region. In: *Optics Communications* Volume 231 (2004), Februar, Nr. 1-6, S. 53–70
- [138] GUREYEV, T. E. ; DAVIS, T. J. ; POGANY, A. ; MAYO, S. C. ; WILKINS, S. W.: Optical Phase Retrieval by Use of First Born- and Rytov-Type Approximations. In: *Applied Optics* Volume 43 (2004), April, Nr. 12, S. 2418–2430
- [139] HAFERKORN, Heinz: *Optik: Physikalisch-technische Grundlagen und Anwendungen*. 4. Berlin, Deutschland : Wiley-VCH, 2002. – ISBN 3–527–40372–8
- [140] THORLABS (Hrsg.): *Thorlabs - HeNe Laser HRP350-EC*. <http://www.thorlabs.com/Thorcat/12100/HRP350-EC-Manual.pdf>, Abruf: 01. November 2012
- [141] MARTIENSSEN, Werner ; SPILLER, Eberhard: Bemerkungen zu der Erscheinung der Granulation. In: *Naturwissenschaften* Volume 52 (1965), März, Nr. 3, S. 53–54
- [142] MARTIENSSEN, Werner ; SPILLER, Eberhard: Coherence and Fluctuation in Light Beams. In: *American Journal of Physics* Volume 32 (1964), Dezember, Nr. 12, S. 919–926

- [143] MARTIENSSEN, Werner ; SPILLER, Eberhard: Fluctuation Measurements in Mixed Light Fields. In: *Physical Review* Volume 145 (1966), Mai, Nr. 1, S. 285–287
- [144] MARTIENSSEN, Werner ; SPILLER, Eberhard: Intensity fluctuations in light beams with several degrees of freedom. In: *Physical Review Letters* Volume 16 (1966), März, Nr. 12, S. 531–533
- [145] ARECCHI, Fortunato T.: Measurement of the Statistical Distribution of Gaussian and Laser Sources. In: *Physical Review Letters* Volume 15 (1965), Dezember, Nr. 24, S. 912–916
- [146] ASAKURA, Toshimitsu: Spatial coherence of laser light passed through rotating ground glass. In: *Opto-Electronics* Volume 2 (1970), August, Nr. 3, S. 115–123
- [147] ESTES, Lee E. ; NARDUCCI, Lorenzo M. ; TUFT, Richard A.: Scattering of Light from a Rotating Ground Glass. In: *Journal of the Optical Society of America* Volume 61 (1971), Oktober, Nr. 10, S. 1301–1306
- [148] HARWALKAR, V. ; BOHIDAR, H. ; CHOPRA, S.: Theoretical and experimental investigations of light scattered from a rotating ground glass. In: *Applied Physics B* Volume 31 (1983), August, Nr. 4, S. 215–220
- [149] ALLIED VISION TECHNOLOGIES (Hrsg.): *AVT - Pike F-145B*. <http://www.alliedvisiontec.com/emea/products/cameras/firewire/pike/f-145bc.html>, Abruf: 01. November 2012
- [150] NEWPORT (Hrsg.): *Newport - Compact Linear Stage M-VP-25XA*. [http://search.newport.com/?q=\\*x2=sku&q2=M-VP-25XA](http://search.newport.com/?q=*x2=sku&q2=M-VP-25XA), Abruf: 01. November 2012
- [151] BLANCHARD, Paul M. ; FISHER, David J. ; WOODS, Simon C. ; GREENAWAY, Alan H.: Phase-Diversity Wave-Front Sensing with a Distorted Diffraction Grating. In: *Applied Optics* Volume 39 (2000), Dezember, Nr. 35, S. 6649–6655
- [152] CAMPBELL, Heather I. ; ZHANG, Sijiong ; GREENAWAY, Alan H. ; RESTAINO, Sergio: Generalized phase diversity for wave-front sensing. In: *Optics Letters* Volume 29 (2004), Dezember, Nr. 23, S. 2707–2709
- [153] WALLER, Laura ; LUO, Yuan ; YANG, Se Y. ; BARBASTATHIS, George: Transport of intensity phase imaging in a volume holographic microscope. In: *Optics Letters* Volume 35 (2010), September, Nr. 17, S. 2961–2963
- [154] HORN, Alexander ; MINGAREEV, Ilja ; WERTH, Alexander ; KACHEL, Martin ; BRENK, Udo: Non-interferometric transient quantitative phase microscopy for ultrafast engineering. In: *Applied Physics A* Volume 93 (2008), Oktober, Nr. 1, S. 165–169
- [155] LINOS (Hrsg.): *LINOS - Mikrobank Würfel*. <http://www.qioptiq-shop.com/Optomechanik/LINOS-Mikrobank/Wuerfel/Wuerfel.html>, Abruf: 01. November 2012

- [156] LINOS (Hrsg.): *LINOS - Strahlteilerwürfel VIS*. <http://www.qioptiq-shop.com/Praezisionsoptik/Planoptik/Strahlteiler/Strahlteilerwuerfel-VIS.html>, Abruf: 01. November 2012
- [157] LINOS (Hrsg.): *LINOS - Mikrobank Prismenträger*. <http://www.qioptiq-shop.com/Optomechanik/LINOS-Mikrobank/Feinstelleinheiten/Prismentraeger-30-justierbar.html>, Abruf: 01. November 2012
- [158] PHYTEC MESSTECHNIK GMBH (Hrsg.): *Zwischenringsatz*. <http://www.phytec.de/de/produkte/bildverarbeitung/objektive/produktetails/p/zwischenringsatz.html>, Abruf: 01. November 2012
- [159] BURGER, Wilhelm ; BURGE, Mark: *Digital Image Processing*. 1. New York, United States : Springer Science+Business Media, 2008. – ISBN 1-846-28379-5
- [160] ALLIED VISION TECHNOLOGIES (Hrsg.): *AVT - Pike Technical Manual V5.1.2*. [http://www.alliedvisiontec.com/fileadmin/content/PDF/Products/Technical\\_Manual/Pike/Pike\\_TechMan\\_V5.1.2\\_en.pdf](http://www.alliedvisiontec.com/fileadmin/content/PDF/Products/Technical_Manual/Pike/Pike_TechMan_V5.1.2_en.pdf), Abruf: 01. November 2012
- [161] NVIDIA CORPORATION (Hrsg.): *CUDA Zone*. [http://www.nvidia.com/object/cuda\\_home.html](http://www.nvidia.com/object/cuda_home.html), Abruf: 01. November 2012
- [162] LOOMIS, Nick ; WALLER, Laura ; BARBASTATHIS, George: High-Speed Phase Recovery Using Chromatic Transport of Intensity Computation in Graphics Processing Units. In: *Biomedical Optics, OSA Technical Digest (CD)*. United States : Optical Society of America, 2010, S. JMA7
- [163] AMPEM-LASSEN, E. ; HUNTINGTON, S. T. ; DRAGOMIR, N. M. ; NUGENT, K. A. ; ROBERTS, A.: Refractive index profiling of axially symmetric optical fibers: a new technique. In: *Optics Express* Volume 13 (2005), Mai, Nr. 9, S. 3277–3282
- [164] DUKE SCIENTIFIC CORPORATION (Hrsg.): *Certified Particle Size Standards - Glass*. <http://www.distrilabparticles.com/spacers/pdf/Bul119'A'Glass.pdf>, Abruf: 01. November 2012
- [165] CARL ZEISS: *Gebrauchsanleitung zum Abbe-Refraktometer*. Oberkochen, Deutschland, 1972
- [166] WAHBA, Hamdy H. ; KREIS, Thomas: Characterization of graded index optical fibers by digital holographic interferometry. In: *Applied Optics* Volume 48 (2009), März, Nr. 8, S. 1573–1582
- [167] EL-MORSY, M. A. ; YATAGAI, T. ; HAMZA, A. A. ; MABROUK, M. A. ; SOKKAR, T. Z. N.: Automatic refractive index profiling of fibers by phase analysis method using Fourier transform. In: *Optics and Lasers in Engineering* Volume 38 (2002), Dezember, Nr. 6, S. 509–525

- [168] HAMZA, A. A. ; SOKKAR, T. Z. N. ; EL-BAKARY, M. A. ; ALI, A. M.: An interferometric method for studying the influence of temperature on the mean refractive indices and cross-sectional area of irregular fibre. In: *Polymer Testing* Volume 22 (2003), Februar, Nr. 1, S. 83–91
- [169] ROBERTS, A. ; AMPEM-LASSEN, E. ; BARTY, A. ; NUGENT, K. A. ; BAXTER, G. W. ; DRAGOMIR, N. M. ; HUNTINGTON, S. T.: Refractive-index profiling of optical fibers with axial symmetry by use of quantitative phase microscopy. In: *Optics Letters* Volume 27 (2002), Dezember, Nr. 23, S. 2061–2063
- [170] HAMZA, A. A. ; MABROUK, M. A. ; RAMADAN, W. A. ; WAHBA, H. H.: Core-index determination of a thick fibre using lens-fibre interference (LFI) technique. In: *Optics and Lasers in Engineering* Volume 42 (2004), August, Nr. 2, S. 121–130
- [171] MARTINCEK, I. ; KACIK, D. ; TUREK, I. ; PETERKA, P.: The determination of the refractive index profile in  $\alpha$ -profile optical fibres by intermodal interference investigation. In: *Optik* Volume 115 (2004), November, Nr. 2, S. 86–88
- [172] LIU, Z. ; DONG, X. ; CHEN, Q. ; YIN, C. ; XU, Y. ; ZHENG, Y.: Nondestructive Measurement of an Optical Fiber Refractive-Index Profile by a Transmitted-Light Differential Interference Contact Microscope. In: *Applied Optics* Volume 43 (2004), März, Nr. 7, S. 1485–1492
- [173] SOKKAR, T. Z. N. ; DESSOUKY, H. M. E. ; SHAMS-ELDIN, M. A. ; EL-MORSY, M. A.: Automatic fringe analysis of two-beam interference patterns for measurement of refractive index and birefringence profiles of fibres. In: *Optics and Lasers in Engineering* Volume 45 (2007), März, Nr. 3, S. 431–441
- [174] STOCK, Patrick: *Manufacturing Department, FiberTech GmbH*. Nalepastrasse 170–171, 12459 Berlin, Deutschland, 2009. – Private Kommunikation
- [175] FIBERTECH GMBH (Hrsg.): *Quartz/Quartz Fibers - All Silica (AS), Specifications*. <http://www.leoni-fiber-optics.com/Quarz-Quarz-Fasern-All-Silica-AS.11918.0.html?&L=1>, Abruf: 01. November 2012
- [176] THORLABS (Hrsg.): *Thorlabs - Single Mode Fiber 780HP*. <http://www.thorlabs.de/Thorcat/6800/780HP-SpecSheet.pdf>, Abruf: 01. November 2012
- [177] THORLABS (Hrsg.): *Thorlabs - Bandpass Filter FB800-40*. <http://www.thorlabs.de/thorProduct.cfm?partNumber=FB800-40>, Abruf: 01. November 2012
- [178] NANOFOCUS (Hrsg.): *NanoFocus -  $\mu$ surf Technology*. [http://www.nanofocus.de/fileadmin/user\\_upload/download/Produkte/Datenblaetter/NanoFocus\\_Technologiebroschuere\\_08-2011\\_web.pdf](http://www.nanofocus.de/fileadmin/user_upload/download/Produkte/Datenblaetter/NanoFocus_Technologiebroschuere_08-2011_web.pdf), Abruf: 01. November 2012
- [179] ZERNIKE, Frits: How I discovered phase contrast. In: *Science* Volume 121 (1955), März, Nr. 3141, S. 345–349

- 
- [180] LYNCEE TEC SA (Hrsg.): *DHM, the Digital Holographic Microscopes*. <http://www.lynceetec.com/>, Abruf: 01. November 2012
- [181] ALLEN, L. J. ; FAULKNER, H. M. L. ; NUGENT, K. A. ; OXLEY, M. P. ; PAGANIN, D.: Phase retrieval from images in the presence of first-order vortices. In: *Physical Review E* Volume 63 (2001), Februar, Nr. 3, S. 037602(1)–037602(4)
- [182] PHAM, Hoa ; DING, Huafeng ; SOBH, Nahil ; DO, Minh ; PATEL, Sanjay ; POPESCU, Gabriel: Off-axis quantitative phase imaging processing using CUDA: toward real-time applications. In: *Biomedical Optics Express* Volume 2 (2011), Juli, Nr. 7, S. 1781–1793
- [183] KOU, Shan S. ; SHEPPARD, Colin ; PAVILLO, Nicolas ; MARQUET, Pierre ; DEPEURSINGE, Christian: Quantitative phase from defocus. In: *Novel Techniques in Microscopy, OSA Technical Digest (CD)*. United States : OSA - Optical Society of America, 2011, S. NTuC6
- [184] HOLOEYE PHOTONICS AG (Hrsg.): *PLUTO: High-Resolution LCOS Phase Only Spatial Light Modulators*. [http://www.holoeye.com/spatial\\_light\\_modulators\\_pluto.html](http://www.holoeye.com/spatial_light_modulators_pluto.html), Abruf: 01. November 2012
- [185] HECK, Sebastian: *Wellenfront-Korrektur und freie Einstellung der Fokusslage in einem Mikroskop mittels LCoS-Display*, Fachhochschule Köln, Bachelorarbeit, 2011
- [186] MILKIE, Daniel E. ; BETZIG, Eric ; JI, Na: Pupil-segmentation-based adaptive optical microscopy with full-pupil illumination. In: *Optics Letters* Volume 36 (2011), November, Nr. 21, S. 4206–4208
- [187] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis II*. 5. Berlin, Deutschland : Springer, 2004. – ISBN 3–540–20389–3
- [188] JACKSON, John D.: *Classical Electrodynamics*. 3. New York, United States : John Wiley & Sons, Inc., 1998. – ISBN 0–471–30932–X
- [189] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY - NIST (Hrsg.): *Green's Functions Tutorial, Introduction to Green's Functions*. [http://www.guspepper.net/electro/Primersemestre/TutorialforGreen'sFunctions,MaterialsReliabilityDivision,N\\_I\\_S\\_T.htm](http://www.guspepper.net/electro/Primersemestre/TutorialforGreen'sFunctions,MaterialsReliabilityDivision,N_I_S_T.htm), Abruf: 01. November 2012
- [190] LYUBOSHENKO, Igor: *Method for obtaining a phase image from an intensity image*. United States Patent 7,889,945 B2, Februar 2011
- [191] BRONSTEIN, Ilja N. ; SEMENDJAJEW, Konstantin A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Frankfurt, Deutschland : Verlag Harri Deutsch, 2008. – ISBN 3–8171–2007–9
- [192] JOLLEY, Leonard B. W.: *Summation of Series*. 2. New York, United States : Dover Publications, Inc., 1961. – ISBN 0–486–60023–8
- [193] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, United States : Dover Publications, Inc., 1970. – ISBN 0–486–61272–4



# Abbildungsverzeichnis

3.1	Ablaufplan Programm Phasenrekonstruktion Dirichlet . . . . .	23
3.2	Ablaufplan Programm Phasenrekonstruktion Neumann . . . . .	24
3.3	Ablaufplan Programm Phasenrekonstruktion unbegrenzter freier Raum . . . . .	27
3.4	Phasen- und Intensitätsverteilung sphärisches Phasenobjekt . . . . .	29
3.5	Propagierte Intensitätsverteilungen sphärisches Phasenobjekt . . . . .	29
3.6	Rekonstruierte Phasenverteilungen sphärisches Phasenobjekt . . . . .	30
3.7	Schnittlinien sphärisches Phasenobjekt . . . . .	31
3.8	Längsschnitt Glasfaser . . . . .	32
3.9	Phasenstörung Glasfaser . . . . .	33
3.10	Querschnitt Glasfaser . . . . .	34
3.11	Phasen- und Intensitätsverteilung Glasfaser vertikal . . . . .	35
3.12	Propagierte Intensitätsverteilungen Glasfaser vertikal . . . . .	36
3.13	Rekonstruierte Phasenverteilungen Glasfaser vertikal . . . . .	36
3.14	Schnittlinien Glasfaser vertikal . . . . .	37
3.15	Phasen- und Intensitätsverteilung Glasfaser verkippt . . . . .	38
3.16	Propagierte Intensitätsverteilungen Glasfaser verkippt . . . . .	39
3.17	Rekonstruierte Phasenverteilungen Glasfaser verkippt . . . . .	39
3.18	Schnittlinien Glasfaser verkippt . . . . .	40
3.19	Phasen- und Intensitätsverteilung absorbierendes Objekt . . . . .	41
3.20	Propagierte Intensitätsverteilungen absorbierendes Objekt . . . . .	42
3.21	Rekonstruierte Phasenverteilungen absorbierendes Objekt . . . . .	43
3.22	Schnittlinien absorbierendes Objekt . . . . .	44
4.1	Strahlengang nach Köhler . . . . .	53
4.2	Aufbau Echtzeit-System . . . . .	57
5.1	Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Partikelstandard . . . . .	62
5.2	Schnittlinie Partikelstandard . . . . .	63
5.3	Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Faser AS 100/140 IRAN . . . . .	65
5.4	Schnittlinie Faser AS 100/140 IRAN . . . . .	66
5.5	Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Faser 780HP . . . . .	67
5.6	Schnittlinie Faser 780HP . . . . .	67
5.7	Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Mikrolinse . . . . .	69
5.8	Schnittlinien Mikrolinse . . . . .	70
5.9	Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Erythrozyten . . . . .	71
5.10	Falschfarben 3D-Darstellung Erythrozyten . . . . .	71

5.11 Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Mundschleimhautzelle . . . . .	72
5.12 Falschfarben 3D-Darstellung Mundschleimhautzelle . . . . .	72
5.13 Intensitätsverteilungen und Rekonstruktion Diatomee . . . . .	73
5.14 Falschfarben 3D-Darstellung Diatomee . . . . .	74
5.15 Simulierte Aufnahmen Interferenzmikroskop . . . . .	75
5.16 Simulierte Aufnahmen differentieller Interferenzkontrast . . . . .	77
5.17 Simulierte Aufnahmen Echtfarben differentieller Interferenzkontrast . . . . .	78
5.18 Numerische Wellenfeldpropagation Mundschleimhautzelle . . . . .	79



# Tabellenverzeichnis

3.1	Übersicht Abweichungen und Fehler der rekonstruierten Phasenverteilung zu den Sollwerten verschiedener simulierter Objekte . . . . .	46
3.2	Vergleich Soll- und rekonstruierte Werte Glasfaser . . . . .	48



# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Köln, im Januar 2012

Johannes Frank